Dificultades del aprendizaje del cálculo a nivel universitario y su relación con ingeniería

José Ángel García Retana [1]

El aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas en general, y el cálculo en particular, presentan una de las mayores dificultades para los estudiantes de nivel universitario, incluidos los estudiantes de las carreras de Ingeniería. El abordaje de este problema dista mucho aún de encontrar soluciones precisas y efectivas. La tendencia a centrar el aprendizaje del cálculo en el álgebra, la cual a su vez tiende a manejarse desde una perspectiva aritmética, ha complicado más el panorama al dejar de lado la esencia misma del cálculo, y resolver problemas que surgen en el contexto en que se desarrolla el educando. El contexto histórico en los últimos 60 años evidencia la falta de una visión homogénea y clara con respecto al aprendizaje y la enseñanza del cálculo; se perfila en la primera década del siglo XXI una posible salida a través de la "educación matemática" como disciplina del conocimiento, independiente de las matemáticas y la pedagogía.

Matemáticas - Cálculo - Ingeniería

The learning and teaching of mathematics in general and calculus in particular are extremely difficult for university-level students, including for the students of engineering careers. The approach to this problem is still far from precise and effective solutions. The tendency to focus attention on algebra for calculus learning, which in turn tends to be handled from an arithmetic perspective, has complicated matters even more because

[1] Licenciado en Enseñanza de la Matemática. Profesor de la Universidad de Costa Rica, sede Guanacaste. Liberia, Guanacaste, Costa Rica. E-mail: jose.garcia@ucr.ac.cr.

this method leaves out the very essence of calculus, and does not solve the problems arising from the context in which the students develop. The historical context of the last 60 years demonstrates the lack of a consistent and clear point of view about calculus learning and teaching. In the first decade of the 21st century a possible way out through "mathematics education" as a discipline of knowledge independent of mathematics and pedagogy is being considered.

Mathematics - Calculus - Engineering

Introducción

Investigaciones realizadas desde hace muchos años revelan que la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas constituyen uno de los problemas más significativos dentro de cualquier modelo educativo. El nivel de promoción y el de repetición en los cursos de matemáticas son solo dos indicadores más de esta problemática, cuya dimensión humana se encuentra ligada a la frustración tanto de los educandos como de los educadores. De ahí la importancia de ser analizados.

En el marco de la sociedad del conocimiento, no se discute sobre la importancia y pertinencia del aprendizaje de las matemáticas, pero es evidente que no se tiene claro cómo se da este. Se asume que el aprendizaje de las matemáticas contribuye a que el individuo desarrolle todos sus recursos cognitivos; sin embargo, consideraciones e investigaciones como las de Artigue (2000), Salinas y Alanís (2009) y Camarena (2009) dejan profundas dudas de que esto se esté logrando.

Frecuentemente se asocia a las matemáticas con el "razonamiento correcto" definido por la lógica aristotélica, y se dejan de lado los aspectos motivacionales y subjetivos del educando, lo que ha posibilitado que la disciplina se enseñe de manera masiva, descontextualizada y algoritmizada. Es decir, se ha convertido al aprendizaje de las matemáticas en un proceso ligado a una serie de reglas y algoritmos basados en axiomas, postulados y teoremas que al ser aplicados correctamente se convierten en un fin en sí mismo, lejos de la realidad cotidiana; en algunos casos, se llega a un nivel que roza con la aritmética, donde lo único que se vuelve importante es que el educando sea capaz de dar con la respuesta correcta en determinadas pruebas, o a los ejercicios presentes en algún texto, mediante en muchas ocasiones, el apoyo de calculadoras (García, 2009), de manera tal que el aprendizaje de las matemáticas resulta ser irrelevante en tanto no es significativo.

En el caso del cálculo para carreras universitarias, y particularmente las ligadas a la ingeniería, su aprendizaje se da en un marco contradictorio, pues se aduce que constituye la base del desarrollo profesional de los educandos al constituir un valioso recurso para enfrentar y resolver problemas; sin embargo, su enseñanza se ha basado en la aplicación de las reglas del álgebra, lo que ha generado un alto nivel de descontextualización. De este modo, deja de ser un recurso para los efectos indicados. Además, muchos cursos de cálculo se desarrollan de manera desarticulada con los restantes cursos de las carreras universitarias (Camarena, 2010), y obligan al educando a realizar la titánica labor de intentar integrar los saberes aprendidos como un todo, cosa que evidentemente no es fácil de lograr.

Frente a lo anterior se ha planteado la alternativa de un aprendizaje y enseñanza del cálculo que propone retomar el origen histórico de la disciplina de manera tal que la misma contribuya a resolver problemas ligados a la naturaleza y el aprovechamiento óptimo de sus recursos. Sin embargo, la complejidad de esta propuesta radica en la reconceptualización de la disciplina y en la preparación de los docentes que la impartan, de manera tal que sean capaces de insertar los conocimientos del cálculo en el contexto cotidiano del educando o mejor aún, partir de problemas del contexto para aplicar los conocimientos propios de la disciplina en la solución de problemas reales y concretos (Zúñiga, 2007) frente a la economía de recursos que implica la existencia de cursos genéricos, masificados, descontextualizados y basados en el seguimiento de "textos clásicos".

En lo complejo de este escenario, debe destacarse el papel que juega el docente, el cual resulta vital porque, dependiendo de la percepción de su propio trabajo, puede inducir al educando a ver en las matemáticas un recurso teórico que se reduce a la algoritmización, que vale por sí mismo o un instrumento para resolver problemas.

Dificultades del aprendizaje de la matemática en el nivel universitario (cálculo)

En la actual sociedad del conocimiento, se considera a las matemáticas como una de las disciplinas más importantes al posibilitar el desarrollo por parte de los educandos de sus capacidades de exploración, justificación, representación, discusión, descripción, investigación y predicción (Idris, 2009); aspectos que contribuyen de manera significativa a la generación de competencias. Esto es posible si consideramos que a través de las matemáticas el sujeto cognoscente puede organizar y estructurar la información que percibe o recibe en una situación cotidiana o creada intelectualmente, con el fin de identificar los aspectos más relevantes, descubrir regularidades, relaciones y estructuras que le permitan hacer conjeturas e inferencias a partir de proposiciones elementales, así como generalizar resultados a partir de determinados comportamientos constantes y/o lograr demostraciones (Guevara, 1991).

Si esta percepción de lo que son las matemáticas se pierde, es posible que se genere un desconocimiento de qué es hacer matemática y por qué y para qué se deben abordar determinados contenidos en particular y no otros; lo que lleva a muchos estudiantes a no tener claro por qué estudiar matemáticas, aspecto que demerita la motivación hacia esta ciencia (Camarena, 2010), situación que según algunos especialistas podría deberse al hecho de que, generalmente, las matemáticas estudiadas dentro de nuestro sistema educativo están desvinculadas de la vida cotidiana (Cantoral, 2002).

Las matemáticas se relacionan además con el desarrollo tecnológico, en su calidad de ser uno de los pilares de la sociedad del conocimiento, por lo que el aprendizaje y enseñanza de las mismas se ha constituido en un asunto del gran interés e importancia, particularmente en la educación superior de manera general, pero particularmente en el campo de la ingeniería. En este sentido, desde hace mucho tiempo, las matemáticas se han asumido como un "lenguaje universal", y particularmente se resalta este papel al considerarlas como un elemento básico y fundamental para la alfabetización digital, de ahí la necesidad del dominio y aplicación de una matemática mínima esencial por parte de todos los ciudadanos (Orozco, 2008).

Estas visiones de las matemáticas como potenciadoras de competencias por un lado, y como un lenguaje por otro, son particularmente importantes a nivel universitario y, de manera muy específica, en las carreras relacionadas con las ingenierías, carreras en las cuales su aprendizaje se vuelve vital (Cantoral, 2002). Sin embargo, a pesar de estas consideraciones, debemos reconocer que el aprendizaje de las matemáticas se ha constituido en uno de los problemas más significativos en todos los niveles de los sistemas educativos, incluido el superior.

La representación de los conceptos matemáticos y su dificultad de ser aprendidos

Según Tall (1990), pareciera evidente que el aprendizaje de las matemáticas debería basarse en una construcción donde las ideas simples anteceden a las más complejas, donde es importante lograr articular la capacidad representacional de los conceptos tanto de manera interna como externa. Las representaciones externas: "comprenden los sistemas simbólicos convencionales de las matemáticas tales como la numeración en base diez, notación formal algebraica, la recta numérica real, la representación en coordenadas cartesianas" (Godino, 2009, p. 19), por lo que muchos de estos sistemas son fundamentalmente notacionales y formales, y se destacan por el manejo de expresiones algebraicas. El otro sistema de representación es el visual o gráfico, basado en sistemas cartesianos, polares, etc. Por otra parte, se consideran representaciones internas a "los constructos de simbolización personal de los estudiantes, las asignaciones de significado a las notaciones matemáticas" (Godino, 2009, p. 20).

La interacción entre estos dos tipos de representaciones es fundamental para el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas. Debido a su carácter abstracto, las representaciones internas constituyen una inferencia de las externas como resultado de analogías, imágenes y metáforas, por lo que se puede considerar que "un concepto matemático se ha aprendido y se puede aplicar en la medida en que se han desarrollado una variedad de representaciones internas apropiadas, junto con las relaciones funcionales entre ellas" (Godino, 2009, p. 21).

Así las cosas, el aprendizaje del conocimiento matemático depende de la capacidad de "representación" que logre o pueda desarrollar el individuo, donde un concepto, en términos generales, puede ser representado de dos maneras: visual o semiótica, lo que implica una extraordinaria complejidad cognitiva donde el proceso de pensamiento matemático demanda muchas veces poder transformar la información de una a otra forma de esas dos posibles representaciones.

Duval (2006, citado por D´Amore, 2011) indica que tales transformaciones usualmente no se toman en cuenta de manera explícita al enseñar matemáticas, y que la complejidad cognitiva que podemos encontrar, de manera subyacente en el pensamiento matemático, radica en el hecho de que estas dos formas de representación son muy diferentes, e implican manejos distintos, por lo que la enseñanza de las matemáticas podría estarse dando, en muchos casos, con desconocimiento por parte de los docentes sobre lo que se debe entender por hacer matemáticas, al desconocer de manera clara y distinta cómo se opera cognitivamente con ella.

Particularmente en el caso de la representación semiótica, la cual es clave en álgebra, se presenta generalmente desde un enfoque transmisivo (Martínez, 2008), donde el discurso se constituye en uno de los principales recursos para su aprendizaje, lo que hace que las matemáticas se puedan percibir como un lenguaje, con la complejidad de que los signos matemáticos no representan los objetos matemáticos y el contexto en que se usan determina qué cosas son.

Lo anterior puede arrastrar al educador en matemáticas a un círculo vicioso (Duval, 1993 citado por D´Amore, 2011), en el cual el aprendizaje de los objetos matemáticos debería ser conceptual por la naturaleza de tales objetos; esto es posible solo si se hace a través del propio lenguaje matemático que permite el manejo conceptual de tales objetos, es decir, solo se puede aprender a manipular los objetos matemáticos si se cuenta con el lenguaje matemático, pero para contar con el lenguaje matemático se requiere poder manipular los objetos matemáticos, lo que lleva a Duval a preguntar: "¿Cómo sujetos en fase de aprendizaje no podrían confundir los objetos matemáticos con sus representaciones semióticas si ellos no pueden más que tener relación solo con dichas representaciones?" (Duval 1993, citada por D´Amore, 2011).

A modo de ejemplos, un símbolo aparentemente tan simple como "0", resulta entonces "extraño" ya que puede significar entre otras cosas la ausencia de, o grandes cantidades de (si se agrega a la derecha de cualquier otro número), de la misma manera, el signo "-" puede implicar una resta, un número negativo, una dirección opuesta, un acercamiento por la izquierda, entre otros. Resulta entonces que el aprendizaje de las matemáticas implica un paradójico uso de símbolos y términos en el lenguaje matemático, sin que estos tengan referentes físicos, por lo que su manejo es totalmente conceptual.

Sin embargo, se supone que tales símbolos deben ser capaces de modelar la realidad, a pesar de ser representaciones en muchos casos polisémicas, por lo que pueden ser sustituidos por otros según sea el contexto matemático al que se refieran, aspectos que pueden llevar al aprendiz a una gran confusión. Lo anterior implica que el carácter semiótico de las matemáticas no significa precisión y exactitud, porque en muchos casos no existen referentes en el lenguaje del educando, lo que demanda del aprendiz el desarrollo de la capacidad de determinar cuándo se habla de una cosa y cuándo de otra.

Lo anterior puede llevar a serios problemas de comunicación entre los docentes y los discentes, ya que los "lenguajes" que utilizan unos y otros no necesariamente son los mismos, de manera que mientras el docente podría estar utilizando un lenguaje técnico, los educandos podrían interpretarlo coloquialmente o viceversa, lo cual dificulta y en ocasiones imposibilita una sola interpretación (García Retana, 2012; Tall, 1990).

¿El álgebra como centro del quehacer matemático?

Artigue (2000) indica haber obtenido evidencias de que los estudiantes presentan serias dificultades para el desarrollo de conceptos matemáticos cuando estos van más allá de los aspectos puramente algebraicos. Pero el problema no se queda ahí, y el que el cálculo se reduzca al álgebra puede ser considerado como el mal menor, ya que su aprendizaje debe enfrentar el problema que, como lo indica Miller (2007), se profundiza cuando los conocimientos previos y niveles de manejo del álgebra, por parte de muchos estudiantes, presentan serios problemas, aspectos que se ha manifestado a través del uso de la calculadora como un recurso para obtener calificaciones que promueven a los estudiantes desde los niveles inferiores a los superiores en la educación media (García, 2009), lo que implica que, en muchos casos, ni siquiera se puede esperar un manejo instrumental y algorítmico del álgebra.

Es decir, en la medida que el aprendizaje del cálculo ha tendido a verse como una extensión del álgebra, tanto por estudiantes como docentes, obviando que estos dos campos de las matemáticas poseen sus propias reglas y características y que no necesariamente lo que es verdad en uno lo es en el otro, se estaría potenciando un aprendizaje sin comprensión caracterizado por ser débil, pasajero y hasta contradictorio.

Considerar al álgebra como el centro de las matemáticas está ligado a los últimos cincuenta años de historia en la enseñanza de la disciplina, la cual se ha desarrollado en un escenario singular y contradictorio, marcado por reformas y contrarreformas. Basta recordar que a finales de los años 50 se gestó en Europa una reforma que abogaba por unas matemáticas desde un punto de vista totalmente deductivo (dejando de lado el carácter intuitivo y su capacidad para resolver problemas), por ende abstracto, de manera que la enseñanza de la disciplina se basaba en una: "introducción de la teoría de conjuntos, simbolismo moderno, erradicación de la geometría euclidiana, introducción de las estructuras algebraicas y de sistemas axiomatizados, algebrización de la trigonometría, etc., etc." (Ruiz, 1995, p. 152-153).

Esta reforma se concentró más en el manejo de definiciones, teoremas, lemas, postulados y su fundamentación lógica que en la resolución de problemas, como reflejo de un alto nivel de formalización y axiomatización. Ello favoreció un trato homogenizado de los educandos con respecto a los contenidos curriculares, independiente del nivel escolar y, en el caso universitario, de las carreras profesionales; posibilitó un manejo masificado de estudiantes. Incluso, en muchas ocasiones, generó (y posibilita aún hoy en día) encontrar docentes que no tienen claridad del papel que juegan las matemáticas en el quehacer humano y especialmente en las carreras de ingeniería, y cómo esto afecta tanto al proceso de aprendizaje como de enseñanza.

La reforma indicada llevó a la humanidad a una especie de callejón sin salida que fue considerado por Morris Kleine a mediados de los años 70 en su famoso libro *El fracaso de las Matemáticas Modernas. ¿Por qué Juanito no puede sumar?,* donde cuestionó la significatividad del aprendizaje de las matemáticas merced a dicha reforma internacional, y posteriormente, y en contraposición a la misma, la enseñanza de las matemáticas pasó a un proceso de algebrización y aritmetización (Artigue, 1995).

¿Enseñanza-aprendizaje o aprendizaje-enseñanza de las matemáticas?

Considerando las dificultados cognitivas que conlleva el aprendizaje de las matemáticas, es conveniente establecer la diferencia que existe entre enseñanza-aprendizaje y aprendizaje-enseñanza. Esta relación de términos no debe ser considerada de manera indistinta, sino que, de una u otra manera, reflejan implícitos conceptuales de primer orden, puesto que si basados en la lógica aristotélica, la primera palabra corresponde a un antecedente, la segunda se referirá a su consecuente.

De esta manera, plantear enseñanza-aprendizaje implicará que el modelo educativo se centra en la enseñanza o enfoque transmisivo (Martínez, 2008), por lo que se debe basar en una buena planificación y una excelente didáctica. Por ende, el acto pedagógico parte del quehacer del docente donde la labor de los educandos se caracterizará por una respuesta a este quehacer, aspecto que puede caer fácilmente en una educación de tipo bancaria tal y como lo plantea Freire (2006). En tanto, cuando se plantea el proceso desde la perspectiva del aprendizaje-enseñanza, el aprendizaje marca el derrotero del acto pedagógico y por tanto el proceso de enseñanza queda subordinado a este (enfoque constructivista), lo que implica que el docente, previo a su desempeño como enseñante, debe procurar conocer cómo aprenden sus estudiantes, donde conocer el estilo de aprendizaje de los estudiantes se convierte en una necesidad vital (Nevot, 2001).

Solo conociendo cómo aprenden los estudiantes es que el esfuerzo de la enseñanza podría tener algún efecto positivo, ya que el docente es más que un mero transmisor de información. Su papel fundamental es el de crear espacios y gestionar las condiciones que posibiliten organizar las situaciones de aprendizaje (Therer, 1998).

De ahí la necesidad e importancia de que el docente adquiera consciencia de que no existe un estilo de aprendizaje o de enseñanza que sea mejor que otro, ya que el acto educativo está ligado a cuatro factores fundamentales: a) la motivación de ambos, b) las capacidades cognitivas de los educandos, c) los estilos de aprendizaje de los educandos y su relación con el estilo de enseñanza del profesor, y d) los objetivos curriculares a desarrollar.

Lo anterior lleva a considerar que el aprendizaje depende de la influencia del profesor, del dominio en su disciplina, del ámbito de sus competencias, del modelo didáctico que implemente; pero, particularmente, de su estilo de enseñanza (Amado, Brito & Pérez, 2007), el cual se manifiesta en la interacción que mantiene con los educandos. De esta manera, es posible que una de las causas más significativas que dificultan el aprendizaje de las matemáticas por parte de los estudiantes se encuentre en la forma como se ha dado la enseñanza de la disciplina, particularmente si se ha hecho desde una perspectiva "axiomatizada", algorítmica y rutinaria (Cordero, 2005; Moreno, 2005), llevando al educando a considerar a las matemáticas como un conjunto de reglas, algoritmos y fórmulas que existen y valen por sí mismas, incluso ajenas a la cotidianeidad y al entorno de los sujetos.

En este marco, es posible que los bajísimos niveles de promoción en matemáticas en todos los estratos del sistema escolar, incluido el universitario, independientemente de las carreras universitarias, estén asociados al problema de desconocimiento del qué y para qué hacer matemáticas y su relación con el entorno, centrar la misma desde una perspectiva semiótica ligada al álgebra, reduciéndose o imposibilitándose las capacidades de traslación de la representación de los conceptos, lo que provoca confusión, choques cognitivos constantes sin solución y desmotivación, y generándose un círculo vicioso que incrementa las dificultades del aprendizaje de dicha disciplina.

Patricia Camarena (2009) incluso afirma que en el caso de las ingenierías, el alto índice de reprobación en los cursos universitarios viene a ser una muestra del poco interés que muchos estudiantes manifiestan por las matemáticas, debido a su "desconexión" y descontextualización con su realidad y su entorno, así como la desarticulación que existe con los otros cursos de las carreras que cursan, aspectos que llevan a un conflicto permanente. Indudablemente, estos aspectos contribuyen de manera sensible a propiciar la sensación de que el aprendizaje de las matemáticas es un fin en sí mismo. Ello contradice el planteamiento de verlas como un lenguaje dentro de la sociedad del conocimiento, y como base para el desarrollo de competencias, ligadas a muchas áreas científicas y profesionales.

Debe considerarse entonces que el fracaso, por parte de muchos estudiantes, en los cursos de cálculo, y principalmente en los cursos introductorios, como lo apuntan Artigue (2000), Miller (2007) y Tall (1992), podría estar relacionado con el abordaje que los docentes han hecho al respecto y particularmente en los tópicos de álgebra, ya que los estudiantes que ingresan a las universidades han pasado previamente por niveles educativos que han incidido en su forma de ver, aproximarse y trabajar en matemáticas.

La conflictiva relación entre el cálculo y el álgebra a nivel universitario

Las investigaciones realizadas con respecto al aprendizaje del cálculo por Artigue (1995, citado por Salinas & Alanís, 2009) dejaron clara evidencia de que para finales del siglo XX las matemáticas en general, y el cálculo en particular, se habían enseñado desde una perspectiva mecanicista, reduciendo su aprendizaje a prácticas algorítmicas y algebraicas íntimamente ligadas a la aritmética, favorecidas por el uso de calculadoras científicas. De manera tal que los estudiantes tienden a privilegiar la obtención de una respuesta -ojalá la correcta-, por encima del proceso que lleva a la misma (García, 2009; Idris, 2009), lo que caracteriza al aprendizaje sin comprensión.

Que el cálculo se reduzca al álgebra, tal y como le revela Artigue (1995), se agrava por los escasos conocimientos previos y bajos niveles de manejo de fórmulas y algoritmos por parte de muchos estudiantes, lo que implica que, en muchos casos, ni siquiera se puede esperar un manejo instrumental de esta área de las matemáticas (Miller, 2007).

Es decir, en la medida que el aprendizaje del cálculo ha tendido a verse como una extensión del álgebra, tanto por estudiantes como por muchos docentes, obviando que el cálculo como parte del análisis y el álgebra constituyen dos campos de las matemáticas que poseen sus propias reglas y características y que no necesariamente lo que es verdad en uno lo es en el otro, se habría estado potenciando un aprendizaje sin comprensión, débil, pasajero y hasta contradictorio.

Asumir al cálculo como una extensión del álgebra, evidentemente va en contra de la naturaleza histórica de su surgimiento, el cual ha mostrado estar ligado a la resolución empírica de problemas concretos y específicos, donde antes de crearse la estructura deductiva, se trabajaba con conceptos, temas y aplicaciones de manera intuitiva, con argumentos físicos, dibujos y generalizaciones (González & Waldegg, 1995). Es decir, la historia de la humanidad muestra que la formalización y abstracción han aparecido siempre después de la creación y la experimentación, aspectos que justificaron la contrarreforma de finales de los años 90 del siglo pasado, encabezada por Artigue (1995) y secundada, entre otros, en la primera década del siglo XXI por Zúñiga (2007) y Camarena (2010).

Lo anterior sugiere que para finales del siglo XX, el aprendizaje y enseñanza del cálculo se movía entre dos grandes propuestas epistemológicas: un manejo formal que incluyó conceptos, un análisis riguroso ligado a definiciones y teoremas y su demostración; y un aprendizaje algebrizado, ligado a las reglas de derivación e integración para la solución de ejercicios desde un texto (Tall, 1992).

La insuficiencia de estas dos visiones del quehacer del cálculo fue detonante para la conformación de una tercera vía, que, dejando de lado las propuestas anteriores, ha planteado la importancia y necesidad de centrar el proceso de aprendizaje-enseñanza en un modelo que parta de la reflexión de la realidad y se vuelque sobre la misma en procura de encontrar en las matemáticas un conjunto de instrumentos intelectuales y cognitivos capaces de posibilitar la búsqueda de soluciones a muchos de los problemas que la humanidad enfrenta con respecto a la explotación y utilización de los recursos naturales. Esta tercera alternativa en la enseñanza de las matemáticas y particularmente del cálculo recupera las ideas de González y Waldegg (1995) y se perfila con gran claridad a partir de los aportes de, entre otros, Zúñiga (2007) y Camarena (2010).

La razón de esto está en que las matemáticas, y particularmente el cálculo, en tanto construcción humana, han sido creadas para resolver problemas en términos de la relación hombre-naturaleza, en su vida cotidiana, por lo que su origen no está en la deducción lógica o en la abstracción. En el caso particular del cálculo, destaca que el mismo es una de las herramientas matemáticas más poderosas y útiles para tales efectos, cuyos orígenes se remontan a Arquímedes (S. III a.C.) y sus esfuerzos por lograr el cálculo de áreas y volúmenes, pero no fue sino hasta casi dos mil años después, en el siglo XVII gracias a aportes de Descartes y Fermat, que esta área fue retomada con el fin de poder resolver muchos problemas que intrigaban a los matemáticos, como el cálculo de rectas tangentes a una curva, el cálculo de volúmenes, determinar la existencia de máximos y mínimos así como centros de gravedad, etc. Destacan, entre otros, Newton y Leibniz, quienes reclamaron la paternidad del cálculo, aunque cada uno llegó al mismo por caminos y razones distintas, y fueron otros quienes con el paso del tiempo se encargaron de su formalización, como Euler, Gauss, Cauchy, Riemann, etc.

Los esfuerzos por reorientar el aprendizaje del cálculo constituyen uno de los elementos claves de la educación matemática, en calidad de vía alternativa a la reforma de los años 60 del siglo XX y como respuesta al aprendizaje sin comprensión propiciado por la algebrización y aritmetización del cálculo que ha promovido un aprendizaje basado en la memoria y la algoritmia (Cantoral, 2002; Idris 2009). A través de la educación matemática se procura que el educando pase de cómo responder correctamente en los exámenes, a aprender el trasfondo y manejo de los contenidos (Tall, 2002) que permitan la promoción y desarrollo de competencias, tal y como han sido propuestas desde el Informe Delors (Delors, 1997).

La necesidad de un nuevo enfoque en el aprendizaje de las matemáticas y particularmente del cálculo

Abundantes estudios realizados en muchos países indican que los problemas con el aprendizaje de las matemáticas no son de orden local o regional sino de orden mundial (Artigue, 2000; Camarena, 2009; Tall, 1992). Tales problemas han sido estudiados tanto cuantitativa como cualitativamente de manera muy detallada en las últimas décadas, pero es evidentemente que aún se está lejos de poder resolverlos.

Nadie discute la importancia del aprendizaje de las matemáticas, ya que se asume su utilidad y necesidad de manera clara y distinta, ubicándose a la misma en una posición privilegiada frente a otras disciplinas del conocimiento humano. Pero aun así, es usual que mucha gente se pregunte qué aspectos de las matemáticas son los que deben ser aprendidos por todos los miembros de la sociedad, particularmente por los estudiantes universitarios y específicamente aquellos que estudian carreras ligadas a la ingeniería (Camarena, 2010).

Tales preguntas generalmente se centran en los contenidos definidos en los currículos escolares del sistema educativo (Pulido, De la Torre, Luque y Palomo, 2009), que no necesariamente se corresponden con la esencia de lo que es hacer matemáticas o con las necesidades del quehacer de la ingeniería, aspectos que son mucho más complejos y que involucran variables como la motivación, la afectividad, la imaginación, la comunicación, los aspectos lingüísticos y la capacidad de representación (Cantoral, 2002).

Este aspecto fue planteado desde mediados de las década de los 90 por Artigue (1995), quien indicó que la problemática del aprendizaje de las matemáticas es particularmente observable en el aprendizaje de cursos introductorios de cálculo, en los cuales priva una evaluación que demanda del educando la repetición de un esquema de pensamiento, que se manifiesta a través de ejercicios similares o iguales a los utilizados en clase (Moreno, 2005), y conlleva, entre otros aspectos, a una pérdida de la imaginación, incapacidad de traslación de lo semántico a lo gráfico y viceversa e incapacidad para relacionar los conceptos con el entorno y la cotidianeidad (Tall, 2002).

A partir de esta situación, surge la propuesta de la educación matemática como un área del conocimiento que va más allá de una fusión entre las matemáticas y la pedagogía, lo que ha permitido el desarrollado de amplias y diversas investigaciones en la última década para abordar los problemas que la misma plantea, con la expectativa de poder enfrentar los problemas del aprendizaje de las matemáticas, tomando en cuenta que el mismo está afectado por múltiples variables, tanto de orden psicológico (se incluyen aspectos cognitivos y emocionales, entre otros), epistemológico (se debate sobre lo que es hacer matemática), curricular (que es lo qué se debe aprender y cuándo), así como didáctico (cómo se deben enseñar y para qué) (Cordero, 2005).

Debe considerarse, entonces, que el aprendizaje-enseñanza de las matemáticas y particularmente del cálculo se puede ubicar desde tres grandes enfoques didácticos. En primer lugar, un manejo abstracto, teórico, propio de las matemáticas puras, heredero de la reforma de los años 60 del siglo pasado, donde lo importante es el formalismo propio del pensamiento lógico-aristotélico, por ende descontextualizado y ajeno a la realidad cotidiana, y que conlleva a la supresión de la individualidad, encierra al educando en un formalismo incapaz de contribuir con el desarrollo de sus competencias y actúa como una camisa de fuerza que inhibe o dificulta el desarrollo de su imaginación y creatividad, y choca con su cotidianeidad.

En segundo lugar, un manejo mecánico caracterizado por el uso (y abuso) de fórmulas y reglas sin comprensión por parte del educando (que podría incluir, incluso, a más de un docente), sin contexto; de manera tal que la disciplina se algrebriza y el álgebra se aritmetiza, y se cae en el absurdo de considerar que lo importante en su proceso de aprendizaje se pueda reducir a obtener la respuesta correcta a cualesquiera de los ejercicios que se encuentran en los textos. Sin embargo, este modelo de trabajo se puede desarrollar con poblaciones muy grandes y genéricas, así como con grupos cargados de estudiantes, se aduce que se logra así una cultura matemática mínima y necesaria dentro de la sociedad del conocimiento.

Y un tercer enfoque, producto de la contrarreforma de finales del siglo XX y principios del XXI, caracterizada por procurar devolverle al cálculo su razón de ser y existir: ser un instrumento para resolver problemas que parten o surgen del entorno, tal y como lo proponen Zúñiga (2007) y Camarena (2010), particularmente en la propuesta de matemáticas en el contexto de las ciencias.

En el marco de la contrarreforma de la enseñanza de las matemáticas, en el caso del cálculo y particularmente en el cálculo para ingeniería, se ha ido gradualmente incorporando el uso de recursos tecnológicos (Mack, 1992, citado por Moreno, 2005), así como apelar a una introducción más intuitiva a partir de la resolución de problemas concretos (Zúñiga, 2007), con el objetivo de integrar y coordinar los enfoques numérico, algebraico y gráfico simultáneamente, y lograr dejar de lado el formalismo y el rigor propio de una educación matemática abstracta, en procura de la adquisición de ideas y conceptos más significativos y profundos (Moreno, 2005). Ello permitiría superar la reducción del cálculo a una serie de reglas, o métodos mecánicos que predisponen el funcionamiento cognitivo de los estudiantes, afectan su motivación e interés e interfirieren en su formación profesional y en el futuro desempeño laboral (Zúñiga, 2007).

De lo anterior, cualesquiera de los tres enfoques didácticos planteados para el aprendizaje-enseñanza del cálculo está ligado a la forma como el docente aprecia y desarrollas su labor, por ello es posible que el aprendizaje del cálculo esté afectado por la manera como el docente lo aborda (Moreno, 2005); quien puede estar lejos de lograr que los estudiantes alcancen la comprensión de los conceptos y métodos de pensamiento que demanda esta parte de las matemáticas. Al respecto, Bayazit (2010) indica que hay suficientes evidencias de que las prácticas de la enseñanza están determinadas por el enfoque que sigue el docente con respecto a cómo percibe, manipula y transmite los conceptos matemáticos, lo que lleva a que los aprendizajes de las matemáticas por parte de los estudiantes difieran en términos cualitativos de un docente a otro.

No es entonces una tarea fácil justificar la presencia y didáctica de determinados contenidos matemáticos en los cursos de servicio, particularmente en las áreas de ingeniería (Espinoza, 2008), de manera tal que es posible poner en duda si el saber matemático que se pretende que los estudiantes aprendan y aprehendan en sus carreras universitarias es realmente válido, significativo e importante.

Camarena (2009) analiza la problemática del aprendizaje de las matemáticas desde otro ángulo que debe ser tomado en cuenta, al plantear que lo más extraordinario de la enseñanza de las matemáticas, y que se presenta en los cursos de cálculo para ingeniería, está en que los objetivos de los planes de estudio de los cursos universitarios son generalmente elementos aislados, desvinculados unos de los otros, pero que en su conjunto "pretenden" que los estudiantes lleguen a ser capaces de modelar eventos de su futura actividad profesional, lo que estaría implicando el que los educandos desarrollen la competencia de transferir el conocimiento matemático que se ha aprendido, separado de todo contexto real, hacia su práctica cotidiana. Esta expectativa forma parte del currículo oculto de la enseñanza de las matemáticas y es evidente que no se está logrando.

Cálculo e ingeniería

Dado que en las carreras de Ingeniería las matemáticas se proponen y asumen como uno de los elementos fundamentales para su desarrollo y se parte de la idea de que las mismas constituyen la base sobre la cual se edifica la disciplina, es importante tener una idea más clara de lo que se debe o puede asumir como ingeniería. Al respecto, la Ingeniería, independiente de su área de especialidad, es planteada por la Sociedad Colombiana de Facultades de Ingeniería (ACOFI) como

> la profesión en la que los conocimientos de matemáticas y ciencias naturales, obtenidos a través del estudio, la experimentación y la práctica, se aplican con juicio, para desarrollar diversas formas de utilizar, de una manera económica, las fuerzas y materiales de la naturaleza en beneficio de la humanidad. (Melo, 2003, p. 54)

Lo anterior implica que la ingeniería se desarrolla en función de mejorar las condiciones de la vida humana por medio del uso deliberado de las leyes de la naturaleza para poder explotar sus recursos de forma óptima, por lo que su interés está más en lograr aplicaciones prácticas, es decir, en resolver problemas (Chatterjee, 2005); para lograrlo se hace uso de las matemáticas, particularmente del cálculo.

De esta manera, es fácil comprender por qué Camarena (2009) plantea que en el aprendizaje y enseñanza del cálculo para ingeniería intervienen muchos factores, dentro de los que destacan los referidos a las ciencias básicas, las cuales constituyen la base para las carreras de dicha disciplina; y detalla que en este sentido el aprendizaje del cálculo se han manifestado como el elemento más crítico, al tiempo que advierte que esto lleva a una situación de debilidad en la formación de los futuros ingenieros, debido a que un aprendizaje de las matemáticas en general, y del cálculo en particular, de manera indebida o incorrecta, puede dificultar el desarrollo profesional del futuro ingeniero.

Si se consideran detenidamente los planteamientos dados tanto por ACOFI como por Charttejee sobre qué se debe conceptualizar como ingeniería, y se ligan a la consideración planteada por Guevara (1991) con respecto a qué se puede entender por hacer matemáticas, es posible apreciar el porqué las matemáticas se constituyen en la base del aprendizaje de la ingeniería, particularmente por la demanda que hace al educando de relacionar el ingenio (es decir lo pragmático) con la abstracción y el análisis, elementos básicos para el desempeño de su futuro como ingeniero.

Es claro también que el aprendizaje de la ingeniería, como disciplina del conocimiento, demanda del educando el desarrollo de una gran capacidad reflexiva respecto a los problemas que le presenta el entorno, donde el cálculo debe constituirse en un instrumento para la búsqueda de soluciones o respuestas a los mismos; por lo que, su aprendizaje y su enseñanza no deben ser tomados a la ligera, ya que es posible, incluso, que los estudiantes cuenten con los conocimientos básicos o fundamentales en áreas como: propiedades de los números, ecuaciones, inecuaciones, geometría, e incluso funciones; y aun así fracasar al estudiar cálculo (Vrancken, Gregorini, Engler, Muller & Hecklein, 2006), por cuanto, la educación recibida, previo a llegar a la universidad, basada en el álgebra y la aritmética, apoyada más en algoritmos que en conceptos, los obliga en muchos casos a tener que reaprender por sí mismos, aspecto que es sumamente difícil de lograr, particularmente cuando se ha tenido éxito en el manejo instrumental de las matemáticas en los cursos previos a los de cálculo.

Por lo anterior, no se debe, de manera simple, acusar exclusivamente a los estudiantes como los únicos o principales responsables de las deficiencias de su aprendizaje, o no contar con los conocimientos previos necesarios, ser incapaces de comprender el manejo de los conceptos en cálculo, no poseer las capacidades para articular los conocimientos previos con los conceptos "nuevos", no poder visualizar como los conceptos del cálculo se ligan con el entorno, ya que ellos son el producto de un proceso que algebrizó el cálculo y aritmetizó el álgebra, donde por transitividad el cálculo ha terminado siendo una extensión de la aritmética (Chatterjee, 2005).

Se posibilita así considerar que temas de cálculo desarrollados por especialistas en matemáticas, pero con escasa o nula formación en ingeniería, podrían tener un impacto diferente a si los mismos son desarrollados por especialistas en matemáticas que sí tengan una formación en ingeniería, o al menos logren interpretar este campo del conocimiento humano, de manera tal que sean capaces de apreciar a las matemáticas como un instrumento que contribuye a resolver problemas planteados en dicho campo.

El enseñar cálculo desconociendo su papel en la ingeniería, puede conllevar el riesgo de descontextualizar la razón de ser de su enseñanza, en tanto, enseñar cálculo teniendo una idea de lo que se espera del futuro ingeniero podría abrir espacios a un aprendizaje significativo y vinculado con la realidad, en el marco de la propuesta de Patricia Camarena (2010) sobre la construcción de una ingeniería matemática, que enfilaría el aprendizaje y, consecuentemente la enseñanza, de las matemáticas desde una perspectiva específica propia de la ingeniería, aportándole los instrumentos intelectuales y cognitivos necesarios, que contribuyan a que esta disciplina cumpla de la mejor manera posible con las funciones que le han sido asignadas como área especializada del conocimiento humano.

Algunas conclusiones

Es posible considerar que tanto el aprendizaje como la enseñanza de las matemáticas, particularmente a nivel universitario, se desenvuelven en distintos planos que se contraponen e incluso se contradicen, ya que, mientras uno plantea un mundo ideal que incorpora la formación integral del educando, promoviendo formalmente la generación de competencia y el uso de las matemáticas como un lenguaje en calidad de eje transversal para otras ciencias en la sociedad del conocimiento, el otro plantea un aprendizaje teórico, axiomático, descontextualizado y sin significatividad para el educando

En este marco contradictorio, el aprendizaje y enseñanza del cálculo para estudiantes de ingeniería se enfrenta al hecho de que el mismo es visto muchas veces como una extensión del álgebra (área de la matemáticas que ya de por sí presenta serios problemas para su aprendizaje), y peor aun, que esta a su vez es considerada como una extensión de la aritmética, la cual se liga a un uso indiscriminado de las calculadoras, de manera tal que el cálculo puede terminar siendo visto como el resultado de una correcta manipulación de este recurso técnico.

Esta situación implica procesos de descontextualización que chocan frontalmente con lo que debe asumirse que es la ingeniería y el quehacer de las matemáticas, con respecto a esta disciplina, lo cual lleva a la frustración e incluso a la deserción de muchos estudiantes de sus estudios superiores ligados a esta área profesional.

Se puede afirmar entonces que el problema del aprendizaje del cálculo para ingeniería está ligado con la enseñanza del mismo (Idris, 2009), la cual deviene en reflejo de cómo el docente percibe a la disciplina y su relación con la ingeniería, de manera tal que podría estar propugnando por un aprendizaje mecánico y memorístico en contraposición a uno que privilegia el proceso, el contexto y la comprensión, por encima de la obtención de una respuesta final y correcta, presentándose de manera coherente y clara, sin aspirar a ser plenamente comprendida en todo su significado por parte de los estudiantes de manera automática (Tall, 1992).

Percibir el cálculo como una parte del álgebra, y a esta como una extensión de la aritmética, contribuye a que se pierda de vista el origen del cálculo y su papel en la ingeniería. Es necesario retomar dentro del aprendizaje del cálculo la representación visual de los conceptos y ligar esto a la representación semántica de los mismos, como un todo por el impacto e importancia que esto tiene en el quehacer de los ingenieros para la formulación de posibles explicaciones o manejos de los fenómenos que enfrentan para el ejercicio profesional.

En una sociedad que tiende a la digitalización y caracterizada por el crecimiento exponencial de la información gracias a las tecnologías de la información y la comunicación, percibir el proceso de aprendizaje y enseñanza del cálculo desde la perspectiva algebrizada, reducida a la aritmética de las calculadoras, descontextualizada, formalizada por la abstracción debe cambiar, por lo que se hace necesaria su revalorización sobre el qué hacer y cómo hacer que esta disciplina pueda ser aprendida para constituirse en el instrumento para el cual la humanidad lo creó: un mecanismo para resolver problemas del entorno mediante la reflexión sobre la misma, con el fin de poder optimizar los recursos, cada vez más escasos, con que se cuenta, pero esto solo será posible cuando en la formulación curricular de los cursos de matemáticas para ingeniería, las necesidades de esta disciplina prevalezcan sobre los criterios de los matemáticos.

Original recibido: 08-08-2011
Original aceptado: 26-10-2012

Referencias bibliográficas

Amado, M., Brito, R. & Pérez, C. (2007). *Estilos de aprendizaje de estudiantes de educación superior.* Recuperado el 10 de febrero de 2012, de www.alammi.info/revista/numero2/pon_0011.pdf.

Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En P. Gómez (Ed.). *Ingeniería didáctica en educación Matemática "una empresa docente"* (pp. 97-148). México: Grupo Editorial Iberoamérica. Recuperado el 15 de diciembre de de 2012, de funes.uniandes.edu.co/676/1/Artigueetal195.pdf.

Artigue, M. (2000). Teaching and Learning Calculus. What Can be Learned from Education Research and Curricular Changes in France. En E. Dubinsky, A. H. Schoenfeld & J. J. Kaput (Eds.). *Research in Collegiate Mathematics Education, Vol. IV,* 1-16.

Bayazit, I. (2010). The Influence of Teaching on Student Learning: The Notion of Piecewise Function. *International Electronic Journal of Mathematics Education. Vol. 5, Nº 3,* 146-164. Recuperado el 5 de julio de 2012, de www.iejme.com/.

Camarena, P. (2009). La matemática en el contexto de las ciencias. *Innovación Educativa, 9 (46),* 15-25. Recuperado el 29 de enero de 2011, de www.redalyc.org/articulo.oa?id=179414894003.

Camarena, P. (2010). *La modelación matemática en la formación del ingeniero.* Recuperado el 29 de enero de 2011, de www.m2real.org/IMG/pdf_Patricia_Camarena_Gallardo-II.pdf.

Cantoral, R. (2002). Enseñanza de la matemática en la educación superior. *Sinéctica, 19,* 3-27. Recuperado el 3 de mayo de 2011, de www.portal.iteso.mx/portal/page/portal/Sinectica/Historico/.../019.

Chatterjee, A. (2005). Mathematics in Engineering. *CurrentScience, Vol. 88, Nº 3,* 405-414. Recuperado el 2 de agosto de 2012, de www.ias.ac.in/currsci/feb102005/405.pdf.

Cordero, (2005). El rol de algunas categorías del conocimiento matemático en educación superior. Una socioepistemología de la integral. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, Vol 8, Nº 3,* 265-286. Recuperado el 25 de octubre de 2012, de www.clame.org.mx/relime.htm.

D´Amore, B. (2011). Conceptualización, registros de representaciones semióticas y noética: interacciones constructivistas en el aprendizaje de los conceptos matemáticos e hipótesis sobre algunos factores que inhiben la devolución. *Revista Científica, Nº 11.* Recuperado el 27 de junio de 2012, de www.dm.unibo.it/rsddm/it/articoli/damore/740%20Conceptualizacion.pdf.

Delors, J. (1997). *La educación encierra un tesoro.* México: UNESCO.

Espinoza, D. (2008). La formación matemática en la educación superior. *El Hombre y la Máquina Nº 31,* pp. 52-63. Recuperado el 4 de febrero de 2012, de http://redalyc.uaemex.mx/src/inicio/ArtPdfRed.jsp?iCve=47803105.

Freire, P. (2006). *Pedagogía de la autonomía.* México: Siglo XXI.

García, J. (2009). La calculadora científica y la obtención de la respuesta correcta en el ciclo diversificado. *Actualidades Investigativas en Educación, Vol. 9, Nº 2,* 1-19. Recuperado el 29 de octubre de 2012, de http://revista.inie.ucr.ac.cr.

García Retana, J. (2012). Consideraciones sobre el lenguaje y el aprendizaje de las matemáticas. *Diálogos Pedagógicos, Año X, nº 19,* 111-129.

Godino, J. (2009). *Marcos teóricos sobre el conocimiento y el aprendizaje matemático.* Recuperado el 21 de septiembre de 2011, de http://www.ugr.es/local/jgodino.

González, M. & Waldegg, G. (1995). El fracaso de la matemática moderna. En T. Castillo & V. Espeleta (Comps.). *La Matemática, su enseñanza y aprendizaje. Lectura 3* (pp. 139-148). San José, Costa Rica: EUNED.

Guevara, R. (1991). *La matemática y la actividad humana. Fascículo de actividades.* San José, Costa Rica: EUNED.

Idris, N. (2009). Enhancing Students 'Understanding in Calculus Trough Writing.

International Electronic Journal of Mathematics Education, Vol. 4, Nº 1, 37-55. Recuperado el 5 de febrero de 2012, de www.iejme.com/012009/d3.pdf.

Martínez, P. (2008). Estilos de aprendizaje: pautas metodológicas para trabajar en el aula. *Revista Complutense de Educación, Vol 19, Nº 1,* 77-94. Recuperado el 15 de junio de 2012, de revistas.ucm.es/index.php/RCED/article/download/.../15556.

Melo, M. (2003). Las matemáticas en la ingeniería a través de la historia. *Revista Ciencia e Ingeniería Neogranadina, Nº 13,* 53-60. Recuperado el 5 de febrero de 2011, de www.redalyc.org/articulo.oa?id=91101306 - México.

Miller, D. (2007). Helping Students Understand Technical Calculus via on Online Learning Supplement and Group Learning. Proceedings of the Mathematics Education into the 21st Century Project. *9th Annual International Conference in Math Education - Mathematics Education in a Global Community, Vol.9,* 431-436. Recuperado el 5 de febrero de 2011, de www.math.wvu.edu/~millerd/.

Moreno, M. (2005). El papel de la didáctica en la enseñanza del cálculo: evolución, estado actual y retos futuros. *Noveno Simposio de la Sociedad Española en Educación Matemática SEIEM* (pp. 81-96). Universidad de Córdoba, Córdoba, España. Recuperado el 28 de enero de 2011, de www.dialnet.unirioja.es/servlet/fichero_articulo?codigo=2728867&orden=0.

Nevot, A. (2001). *Estilos de aprendizaje y enseñanza de las matemáticas.* Recuperado el 29 de enero de 2011, de www.estilosdeaprendizaje.es/ANevot.pdf.

Orozco, C. (2008). Interacción digital alumno - profesor. El correo electrónico y su atribución en el desarrollo del desempeño matemático universitario. *FOCUS VII, Vol 1,* 43-50. Recuperado el 4 de febrero de 2012, de www.conucopr.org/ViewRecord.do;jsessionid...?id=11178490.

Pulido, M., De la Torre, M., Luque, P. & Palomo, A. (2009). Estilos de enseñanza y aprendizaje en el EEES: un enfoque cualitativo. *Revista Estilos de Aprendizaje, nº4, Vol 4,* 1-14. Recuperado el 14 de febrero de 2012, de www.uned.es/revistaestilosdeaprendizaje/...4/.../lsr_4_articulo_9.pdf.

Ruiz, A. (1995). *Historia de las matemáticas en Costa Rica. Una introducción*. San José, Costa Rica: Editorial UCR.

Salinas, P. & Alanís, J. (2009). Hacia un nuevo paradigma en la enseñanza del cálculo dentro de una institución educativa. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, Vol. 12, Nº 3,* 355-382. Recuperado el 31 de enero de 2011, de www.clame.org.mx/relime.htm.

Tall, D. (1990). Inconsistencies in the learning of Calculus and Analysis. *Focus 12, 3 & 4,* 49-63. Recuperado el 21 de febrero de 2011, de www.warwick.ac.uk/staff/...Tall/pdfs/dot1993k-c...

Tall, D. (1992). Published in Proceedings of Working Group 3 on Students' Difficulties in Calculus, *ICME-7,* 13-28. Recuperado el 28 de enero de 2011, de www.warwick.ac.uk/staff/...Tall/pdfs/dot1993k-c...

Therer, J. (1998). Styles d´enseignement, styles d´apprentissage et pédagogie différenciée en sciencies. *Informations Pédagogiques, nº 40,* 2-23. Recuperado el 9 de febrero de 2012, de www.restode.cfwb.be/download/infoped/info40a.pdf.

Vrancken, S., Gregorini, M., Engler, A., Muller, D. & Hecklein, M. (2006). Dificultades relacionadas con la enseñanza y el aprendizaje del concepto de límite. *Revista PREMISA, año 8, Nº 29,* 9-19. Recuperado el 31 de enero de 2012, de www.soarem.org.ar.

Zúñiga, L. (2007). El cálculo en carreras de ingeniería: un estudio cognitivo. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, año/vol 10, nº 001,* 145-175. Recuperado el 29 de enero de 2011, de www.clame.org.mx/relime/20070107.pdf.