

## Consideraciones sobre el lenguaje y las dificultades para el aprendizaje de las matemáticas

José Ángel García Retana <sup>1</sup>

*La dificultad para el aprendizaje de las matemáticas se debe a múltiples factores. En el presente ensayo se explora la relación entre el lenguaje cotidiano o vernáculo y el lenguaje matemático, en tanto una de las fuentes más significativas del problema apuntado. Para tal efecto se consideran las características que definen al lenguaje vernáculo y el lenguaje matemático y se comparan entre sí. Se valora la importancia del enriquecimiento del lenguaje vernáculo como recurso para un mejor manejo del lenguaje matemático, y con ello facilitar su aprendizaje. Se hace referencia al problema planteado en el caso de los cursos iniciales de matemática en la Sede Guanacaste de la Universidad de Costa Rica.*

### **Lenguaje coloquial - Lenguaje especializado - Matemáticas - Aprendizaje**

*Mathematics learning difficulties are due to many factors. This paper explores the relationship between colloquial or vernacular language and mathematical language, because it is regarded as the main source of the mentioned problem. To this end we consider the characteristics that define the vernacular and mathematical languages, eventually comparing them. It is demonstrated the importance of the enrichment of the vernacular language as a resource for better management of mathematical language, thus facilitating its learning. It is also mentioned the problem that arose in the case of initial mathematics courses at the Guanacate Headquarters of the University of Costa Rica.*

### **Colloquial language - Language for special purposes - Mathematics - Learning**

<sup>1</sup> Licenciado en la Enseñanza de la Matemática. Profesor en la Universidad de Costa Rica, Sede Guanacaste. Liberia, Guanacaste, Costa Rica. E-mail: jose.garcia@ucr.ac.cr

## **Introducción**

Para la mayoría de los estudiantes de nuevo ingreso de la Sede Guanacaste de la Universidad de Costa Rica (SG-UCR) el aprobar los cursos MA 125 Matemática Elemental, MA 230 Matemática para Ciencias Económicas I y MA 1210 Cálculo I, en los últimos años se ha convertido en una pesadilla.

Entre las causas generalmente consideradas destacan la discrepancia entre los contenidos de los cursos citados y los conocimientos previos adquiridos en la secundaria (García, 2009). Sin embargo, esta situación podría estar influida además por elementos aparentemente exógenos a la disciplina y que no han sido debidamente considerados, como la relación entre el lenguaje vernáculo y el lenguaje matemático. El objetivo del presente ensayo es abordar la problemática del aprendizaje de las matemáticas considerando al lenguaje como uno de los factores claves.

## **Sobre el lenguaje vernáculo y el lenguaje matemático**

Definir qué es el lenguaje es sumamente difícil y complicado, sin embargo, para los efectos del presente trabajo, aceptaremos como lenguaje la capacidad que tienen las personas para expresar su pensamiento y comunicarse por medio de un sistema de signos vocales y ocasionalmente gráficos (Larraga, s.f.), lo que permite el intercambio de informaciones de forma controlada, con el fin de poder indicar lo que se pretende, tomando en cuenta las limitaciones contextuales que lo determinan (Puig, 2003), de ahí que se le

considere como una herramienta que regula el pensamiento y en última instancia la conducta (Vigotsky, 2005). Por lo anterior, el lenguaje cumple, sin desmedro de otras, con las siguientes funciones: representación (sustitución del objeto por la palabra), organizar las acciones (por medio de la palabra), y regular y estructurar el comportamiento social.

De esta manera, el lenguaje constituye un sistema arbitrario de signos abstractos reconocido por un grupo de personas del que se sirven para comunicar sus pensamientos y sentimientos, donde el signo cumple una función mediadora entre el individuo y el contexto, permitiendo con ello pasar de lo interpsicológico a lo intrapsicológico (Vigotsky, 2005), lo que asegura la reconstrucción interna o internalización de la acción (Ratford, 2006). Por su parte, un signo es un objeto que está en el lugar de otro para alguna mente (Peirce, 1987, citado por Puig, 2003), por lo que los signos pueden ser de tres tipos: íconos, índices y símbolos. Los íconos poseen una relación de semejanza con el objeto que representan (la relación es directa, tal como en el caso de las pinturas, retratos, dibujos figurativos, mapas, etc.); en el caso de los índices, éstos no se parecen a los objetos correspondientes, sino que los señalan (ejemplo de ello es un rayo, que es el índice de tormenta o una huella, que es el índice de algún rastro), por último, los símbolos mantienen una relación convencional con el objeto al que hacen referencia, por lo cual, dependen completamente de la comunicación y del interpretante para que signifiquen lo que pretenden sustituir, los mismos pueden

ser verbales o no verbales, es decir, hablados o escritos, siendo aquí donde se insertan los distintos tipos de lenguajes.

En el caso del lenguaje hablado, éste utiliza la capacidad de articular sonidos, y en el lenguaje escrito, éste se sustituye por la ortografía, por lo que el desarrollo de las capacidades auditivas y visuales es esencial para la comprensión y expresión del lenguaje (Ramos, s.f.). Lo anterior lleva a considerar que el lenguaje es el tipo más complejo de comunicación intencional (Ramos, s.f.), ya que relaciona sistemáticamente símbolos con un significado y establece reglas para combinar y recombinar tales símbolos con la finalidad de ofrecer diversos tipos de información. De esta manera es posible el regular la conducta, la cual se modifica en la medida que la persona lee y escribe. Se desarrollan así habilidades de pensamiento superior, porque el sujeto razona, analiza, sintetiza y concluye, utilizando el lenguaje interno que ha sido afectado por la estructura que brinda la lecto-escritura (Frade, 2009).

Partiendo de lo anterior, en el presente ensayo se exploran algunos elementos sobre la relación entre el lenguaje cotidiano o vernáculo y el lenguaje matemático. Se partirá de algunos de los criterios de Noam Chomsky (1981), quien considera que el lenguaje cotidiano o vernáculo es una especie de dotación con que cuenta el ser humano al nacer, que debe ser desarrollada en cierta etapa de la vida, presumiblemente antes de la pubertad, ya que de lo contrario las probabilidades de lograr su desarrollo eficiente disminuyen considerablemente (Puente, 2007).

Chomsky propone que el dominio de una lengua inicia con el manejo de una serie finita de componentes lingüísticos, con los cuales el hombre es capaz de construir una cantidad prácticamente ilimitada de oraciones, merced a su capacidad para combinar esta cantidad finita de componentes y sus reglas: "Una persona que conoce una lengua ha dominado un sistema de reglas que relacionan sonido y significado de una manera muy definida produciendo un conjunto infinito de frases posibles" (Chomsky, 1977, p. 176). Según este autor, esta capacidad se desarrolla entre los 0 y los 4 o 5 años, período que coincide con la maduración del organismo (Hardy & Jackson, 1998). Desde esta perspectiva, es claro que el niño no es un receptor pasivo, sino todo lo contrario, inventa y reinventa la lengua que va a ser suya, prácticamente sin esfuerzo logrando hacer uso de una intrincada estructura de reglas específicas y principios de orden que le permiten transmitir sus pensamientos y sus sentimientos a los demás, suscitando con ellos nuevas ideas y sutiles percepciones y juicios (Papalia, Wendkos & Duskin, 2001).

De esta manera, el lenguaje vernáculo o cotidiano se constituye en una herramienta universal (pues todas las civilizaciones la han desarrollado), es además una herramienta cultural porque los integrantes de una cultura la crean y la comparten, asimismo, se considera como una herramienta mental porque todos y cada uno de los sujetos que integran cualquier cultura la utilizan para pensar (Schulte-Herbrüggen, 1985), ya que: "La lengua encierra todo el mundo conceptual e ideológico que

expresa la tradición cultural de un pueblo, y por lo tanto debe ser estudiada como parte de una realidad socio-cultural" (Barrón, 1979, p. 5). Por lo anterior, el lenguaje se constituye en el más importante de los recursos construidos por el hombre para "adueñarse" del mundo, donde la concepción del mundo por parte de una comunidad concuerda con la suma de los contenidos lingüísticos abarcados por la lengua materna; a esto podemos agregar que el individuo adquiere junto con la fonética del lenguaje una enorme cantidad de costumbres que limitan y formalizan el uso de la palabra (Swadesh, s.f.).

Mardonés y Ursúa (1983, citado por Dobles, Zúñiga & García, 1998) resumen lo anterior al considerar que:

Nadie piensa solo. El pensamiento está posibilitado y marcado por el lenguaje, que es radicalmente social e interpersonal [...], de manera tal que los diversos lenguajes hay que comprenderlos como juegos lingüísticos, que poseen sus propias reglas de acuerdo a su contexto o forma de vida [...], donde el sentido de las palabras supone algo más que definir las convencionalmente. De esta manera, el significado de las palabras se obtiene a partir de reglas de uso o comunicación. Estas reglas no son de origen individual, se forjan en un contexto social determinado (forma de vida) y tienen un carácter normativo para la conducta de las personas allí implicadas. (pp. 13-14)

El lenguaje es, entonces, una herramienta mental (cognitiva) primaria que facilita la adquisición de otras herramien-

tas, y se utiliza en muchas funciones mentales como la atención, la memoria y el pensamiento lógico matemático.

Así, todo lenguaje posee a) un conjunto de items básicos discretos que entendemos como vocabulario; b) una sintaxis, es decir, un determinado poder para combinar tales items de manera específica, donde una secuencia de ellos puede determinar diferentes conceptos; y c) un alcance semántico personal, generado por aquellas secuencias que están sintácticamente bien formadas que permiten al individuo hablar sobre objetos (Quesada, 1991). Esto es lo que posibilita al sujeto el "apropiarse" del entorno, aunque no siempre a través de mecanismos precisos y bien definidos, sino a través de aproximaciones con las que van construyendo los conceptos y/o campos semánticos personales (Hardy & Jackson 1998).

Si la asimilación y desarrollo del lenguaje se da por aproximaciones, éste se puede relacionar con la conciencia considerando la propuesta de Dennett, para quien ésta no es estática, sino que está en permanente cambio, elaboración y reestructuración, a través de borradores múltiples. Dennett utiliza la metáfora de la producción textual (Hardy & Jackson, 1998), proponiendo que la conciencia, y por ende el lenguaje, es como un texto que se produce y se revisa constantemente, el cual cambia en razón de la acumulación de más información, reflexiones posteriores, o por la influencia de las emociones y los sentimientos. Así, tanto la conciencia como el lenguaje se constituyen en elementos no permanentes y en movimiento constante. Los conceptos matemáticos no escapan de esta descripción ya que

éstos se hallan en permanente construcción, siendo esta la parte más problemática y por ende más rica de su significado (D'Amore, 2011).

Como ejemplo de lo anterior, al tomar "conciencia" de lo que son los "números", debemos considerar que a los mismos se llega por aproximaciones y no por definición, de manera tal que el concepto de "número" y su representación es el resultado de una secuencia que se está reconstruyendo a sí misma de manera constante, a la que nos acercamos a través de la o las palabras que lo describen y no de una definición, aspecto que vendría a darnos una idea del porqué de la dificultad de alcanzar el paradójico concepto de infinito, o el de diferencial (que deviene prácticamente en recíproco de lo anterior), debido a la dificultad conceptual que reviste, por lo que ante la necesidad de precisar en qué consiste un concepto u objeto matemático, muchas veces se suele recurrir al manejo de analogías (González, 2005).

La interpretación que hacemos del entorno a través del lenguaje se caracteriza por poseer un carácter polisémico, el cual está ligado al significado contextual, lo que contribuye a establecer normas de comportamiento de los individuos. Las matemáticas vistas como un lenguaje deben aportar en este sentido, de ahí la necesidad de considerarse su competencia comunicativa como una de las cuestiones más importantes y significativas (Pimm, 2002), donde el problema fundamental de la enseñanza de las matemáticas debería ser la construcción de significados, más que el manejo riguroso y preciso con que muchas veces se identifica la disciplina (Thom, 1973, citado por Pimm, 2002).

Cuando se considera al lenguaje matemático desde la perspectiva del rigor, éste se caracteriza por ser un conjunto de símbolos o caracteres gráficos que son utilizados procurando una perfecta definición de los conceptos o propiedades de dicha materia (Ortega y Ortega, s.f.), percepción que lleva a considerarlo como un lenguaje artificial (Papini, 2003), el cual es construido para denotar elementos específicos de la disciplina y los conocimientos que ella conlleva. Se presupone así que con él se debe simplificar la comunicación al designar de una manera exacta y sin posible confusión sus contenidos (Ortega y Ortega, s.f.), procurando evitar ambigüedades sobre la veracidad de sus conceptos.

Sin embargo, dado que el lenguaje matemático es fundamentalmente aprendido en la escuela, generalmente por imposición, visto como un sistema codificado y acabado, merced a una presentación gradual que se da de manera planificada y escalonada que se va enseñando y transmitiendo a través de contenidos parciales, distintos conceptos, procedimientos y algoritmos, soportados por un lenguaje específico, cada vez más abstracto y alejado de la expresión física, llegando a convertirse en un objeto de conocimiento en sí mismo (Alcalá, 2002), no siempre logra simplificar la comunicación entre las personas, salvo aquellas que lo conozcan y manejen con propiedad.

El aprendizaje de las matemáticas no se puede plantear a través del simple aprendizaje de signos individuales o aislados (Puig, 2003), si no más bien de "sistemas matemáticos de signos (SMS)" (Puig, 1994), caracterizados por

ser éstos una de colección de símbolos, junto con reglas más o menos explícitas, para identificarlos y combinarlos, que poseen dimensiones sintácticas, semánticas, pragmáticas, funcionales y significativas dentro de la disciplina (Alcalá, 2002; Kaput, 1987, citado por Lacués, 2011). De ahí que lo que podemos calificar como matemáticas no es solamente el uso y comprensión de un tipo de signos, sino más bien de tales "sistemas matemáticos de signos", los cuales tiene sentido en tanto permitan al sujeto plantear conceptos en razón de sus atributos y por las relaciones existentes entre ellos (Godino, 2009), por lo que los signos matemáticos (y su capacidad comunicativa como lenguaje) no existen por sí mismos, sino en función de las relaciones que permiten, plantean y/o establecen.

Es claro que el lenguaje vernáculo o cotidiano se aprende de una manera "natural", como lo indica Chomsky, de forma tal que se adquiere como un lenguaje "primario", llevando a la consideración de que siendo el lenguaje matemático una construcción posterior, puede ser visto como un lenguaje secundario, construido para establecer y describir cierto tipo específico de relaciones (particularmente cuantitativas). Esto sugiere que la asimilación del lenguaje matemático debería ser (técnicamente) más simple y accesible que el vernáculo, ya que deviene en subconjunto propio del primero, donde la construcción de conceptos matemáticos se lograría por aproximaciones sucesivas, asumiéndolos como verdades temporales y no acabadas, como elementos en constante construcción y comparación; sin embargo, generalmente esto no ocurre,

probablemente por el peso que aún ostenta la presunción de que dicho aprendizaje es posible lograrlo a partir de definiciones, teoremas, proposiciones, lemas, demostraciones, corolarios, etc., aspecto que se procuró a través de la implementación de la matemática moderna en los años setenta del siglo pasado y que fracasó estrepitosamente, tal y como lo mostró Morris Kline (1976) en su libro *El fracaso de la matemática moderna*, evidenciando que tal aprendizaje (de las matemáticas y su lenguaje) no solo no es accesible a los educandos, sino que presenta retos significativos para conseguirlo.

Es a partir de ello que surgen interrogantes como ¿se deberán las dificultades del aprendizaje de las matemáticas al carácter artificial del lenguaje matemático?, ¿o a que el lenguaje matemático, en la mayoría de los casos, tiende a aprenderse por imposición, lo que obliga al individuo a aprender una simbología, una sintaxis y una semántica totalmente propias de las matemáticas, ajenas al lenguaje cotidiano?, ¿o será el problema de dicho aprendizaje el poder determinar qué realmente significan los elementos u objetos de los que se habla en matemáticas?

### **Lenguaje y aprendizaje de las matemáticas**

Las investigaciones realizadas en los últimos años muestran que la causa de multitud de errores en el aprendizaje se ubican en la dificultad que supone el aprendizaje de un lenguaje específico, de carácter diferente al lenguaje vernáculo (Alcalá, 2002), por lo que se puede considerar que el problema del

aprendizaje de las matemáticas no es ajeno a esta relación. Lo anterior sugiere que muchos de los posibles errores que cometen los estudiantes en el manejo del lenguaje vernáculo son potenciales generadores de errores en la construcción, interpretación y valoración del significado de los objetos propios del lenguaje matemático, lo que podría llevar a hipotetizar que el problema del aprendizaje de las matemáticas está ligado al manejo del lenguaje vernáculo, por lo que sería posible resolverlo con base en un amplio desarrollo de dicho lenguaje, lo cual se manifiesta claramente insuficiente.

Tenemos entonces la siguiente situación: el educando debe aprender a manejarse con simultaneidad, en al menos dos lenguajes, el vernáculo o cotidiano y el matemático, sin que ello conlleve a tener la capacidad de trasladar y/o traducir de manera directa de un lenguaje a otro. Además se debe enfrentar el problema de que estos lenguajes actúan en muchas ocasiones de maneras muy diferentes uno del otro, ya que la descripción que hacen de la realidad la realizan desde perspectivas y objetivos diferentes, donde el lenguaje vernáculo permite que los criterios de veracidad sean relativos y flexibles, merced al carácter polisémico que tienen las palabras, frente al lenguaje matemático formal y riguroso, plantea sus criterios de manera tal que desecha todo aquello que pueda presentar ambigüedad, siendo esta situación uno de los aspectos que influyen en la dificultad que presentan muchos estudiantes con respecto al aprendizaje de las matemáticas, particularmente aquellos cuyas inteligencias muestran mayores ni-

veles de desarrollo en áreas diferentes a las de la lógica y las matemáticas (Gardner, 1995).

Lo anterior se confronta con las características del lenguaje vernáculo, el cual en tanto construcción social no es ni uniforme ni homogéneo para todos los estratos que conforman una sociedad concreta, si se toma en cuenta que éste se maneja en al menos cuatro niveles de uso de su forma hablada: "el lenguaje culto", que es la forma más elevada y que generalmente se identifica con la lengua escrita, e incluso con la lengua literaria, incluyendo la lengua oral del discurso, de la conferencia o de la cátedra. Un segundo nivel constituido por la llamada "lengua culta espontánea o familiar", que corresponde al modo como, natural y habitualmente, se expresan quienes tienen tradición familiar de cultura o han crecido en un ambiente rico en experiencias. Un tercer nivel constituido por la "lengua popular", y por último está la llamada "lengua vulgar", donde se insertan las jergas en el nivel más bajo (Hildebrandt, 2008).

Por lo que es posible considerar que el lenguaje vernáculo se mueve entre dos extremos: el lenguaje culto y las jergas (Seco, s.f.), donde el lenguaje culto viene a ser una forma marginal o fina desarrollada por el lenguaje científico, en tanto las jergas son la versión "popular" y focal del lenguaje. De ahí que un sujeto se puede mover de uno a otro de estos niveles del habla, según sus necesidades o conveniencias en cada momento. Estos niveles del habla definen el uso del lenguaje vernáculo viéndose el mismo afectado por el contexto, donde el no emplear el registro

adecuado dificulta la comunicación y lleva al error. Es así como se genera el dilema de qué decir, cómo decirlo, y ante quién decirlo, aspectos que el lenguaje matemático formal y riguroso no debería experimentar ya que el uso de definiciones, teoremas, lemas y demás elementos matemáticos deberían homogenizar a todos los sujetos que hacen matemáticas en una sola dirección; sin embargo, esto no sucede debido a que el lenguaje (inclusive el matemático) tiene que ver con el significado de los términos y expresiones (Godino, 2009), los cuales son contextuales, dependen del campo semántico del sujeto y a pesar de lo preciso que pueda parecer el significado de los objetos matemáticos, dependen del uso que se hace de ellos, del contexto en que los mismos se presentan o forman parte y la significatividad que les otorga el individuo.

Por lo anterior, se puede considerar que una gran parte del fracaso en el aprendizaje de las matemáticas reside en la dificultad que encuentran los estudiantes en entender aquello de lo que se les habla o se les cuenta, en parte debido a la forma cómo se cuenta y el para qué se les cuenta (Ortega y Ortega, s.f.), donde además entra en juego el rol que, con respecto al uso del lenguaje, ejerce el docente en el aula, por lo que asumir que el fracaso de los educandos se debe a factores en los cuales el docente no tiene control o es ajeno a las causas de los mismos podría ser falso.

Esta apropiación conlleva un paradójico proceso, ya que el que el aprendizaje de significados condiciona el aprendizaje de nuevos significados, lo

que es vital para poder asimilar significados cada vez más complejos, y donde la apropiación de tales significados posibilita el crecimiento y manejo del lenguaje matemático; por ello, una persona conoce cuando conoce el lenguaje (Dummett, 1991, citado por Godino, 2009), lo que permite inferir que el conocimiento del lenguaje posibilita el conocimiento de los significados, de las expresiones y oraciones utilizadas, y que mientras más rico sea el lenguaje en cantidad de términos, conceptos y significados, más amplia es la gama de posibilidades de utilizarlos, siendo posible "conocer" el mundo.

Lo anterior sugiere, además, que el crecimiento del lenguaje actúa como facilitador de la comprensión y uso de los objetos a los que se refiere el lenguaje mismo, permitiendo al individuo poseer mejores condiciones de reconocibilidad e identificación del objeto hablado, distinguiendo sus posibles representaciones, aportándole muchos contextos personales e institucionales donde poder utilizarlos (Godino, 2009), es decir, enriqueciendo su campo semántico. Se puede hipotetizar, así, que la comprensión del lenguaje matemático podría ser influido por la riqueza y tamaño del vocabulario o léxico que posea el individuo, lo que implica que dirigir el discurso de las matemáticas a un auditorio que cuenta con un vocabulario amplio, culto, rico y educado, es diferente a dirigirlo a individuos que adolecen de tales aspectos (personas que habitan barrios urbano marginales o utilizan jergas en sus procesos comunicativos), significando esto que el entorno y el lenguaje específico que se utiliza en el mismo podría constituirse en instrumentos

que facilitan o dificultan la comunicación y comprensión de aquello de lo que se habla, incluidas las matemáticas.

He aquí una posible fuente de conflictos cognitivos para el aprendizaje de las matemáticas, particularmente si en la clase de matemáticas el maestro utiliza palabras que los estudiantes, en su calidad de oyentes, podrían contextualizar en su campo semántico personal de manera diferente a lo esperado por el docente, generándose así diferentes interpretaciones y comprensiones lingüísticas (Alcalá, 2002; Pimm, 2002), donde el gran perdedor es el educando, máxime cuando el maestro no tiene claro que este fenómeno está aconteciendo, aspecto que solo llega a percibir cuando descubre las dificultades que posee él mismo o sus estudiantes para expresar o comprender aquello de lo que se habla, lo que significa que las cosas de las que se habla en la clase tal vez no son como se piensan (Pimm, 2002).

Desconocer esta contradicción lleva muchas veces a un aprendizaje de las matemáticas basado en un modelo impositivo, formal, riguroso y acabado, que no permite al educando la búsqueda de sinónimos, metáforas o analogías, que le permitan un acercamiento desde una óptica diferente a aquella con que el concepto es presentado (Ortega y Ortega, s.f.). Se cambia así la posibilidad de un acercamiento a los objetos matemáticos a través de aproximaciones mediante el lenguaje vernáculo, lo cual tiene sentido para el educando, por un "acercamiento" producto de una estructuración específica, precisa y exacta, características que la mayoría de los educandos no poseen en sus campos semánticos, es decir, se plantea un acer-

camiento a las matemáticas por definición, por la fuerza y no por la razón.

Y es que, conocer los elementos u objetos de los que habla la matemática implica conocer los "sistemas de prácticas" (operativas y discursivas) en los que los objetos matemáticos cobran sentido, lo que supone conocer los diversos objetos emergentes de los tipos o subsistemas de prácticas, así como su estructura, por lo que los "objetos matemáticos" dependen de al menos tres aspectos (Vergnaud, 1990, citado por Godino, 2002), un conjunto de situaciones que hacen significativo el concepto, un conjunto de invariantes que constituyen el concepto, y un conjunto de representaciones simbólicas utilizadas para representarlo; de manera tal que el considerar que un objeto sea concreto o abstracto depende del juego del lenguaje, lo que significa que los objetos matemáticos devienen en ser esencialmente "relacionales", por lo que deberían ser concebidos en términos socioculturales y no como entidades ideales absolutas (Godino, 2009).

Por lo anterior, el papel que viene a jugar el docente es clave para no caer en un círculo vicioso analizado por Duval (1993, citado por D'Amore, 2011), el cual establece que el aprendizaje de los objetos matemáticos debe ser conceptual por la naturaleza de tales objetos, siendo esto posible solo si se hace a través del propio lenguaje matemático el cual permite el manejo conceptual de tales objetos, es decir, solo se puede aprender a manipular los objetos matemáticos si se cuenta con el lenguaje matemático, pero para contar con el lenguaje matemático se requiere poder manipular los objetos matemáticos, por lo

que Duval se pregunta: "¿Cómo sujetos en fase de aprendizaje no podrían confundir los objetos matemáticos con sus representaciones semióticas si ellos no pueden más que tener relación solo con dichas representaciones?" (Duval, 1993, citado por D'Amore, 2011).

Más aún, la problemática del aprendizaje de las matemáticas puede "escondarse" en el uso correcto de la simbología, en su calidad de signo que sustituye y representa al objeto matemático, llegando incluso al absurdo de creer y hacer creer al educando que ha logrado manejar objetos matemáticos en la medida que maneja su simbología, aspecto que puede realizar de manera correcta aun cuando no comprenda los contenidos y objetos matemáticos a los que hace referencia (Lacués, 2011). Muestra de ello se da cuando un estudiante universitario perfectamente logra obtener la derivada de una función con solo aplicar determinadas reglas respondiendo a la acción directa del docente y el discurso con que éste presentó el objeto matemático, sin tener la más mínima idea de todos los elementos del campo conceptual que tal actividad demanda. De ahí que el fracaso en la conceptualización por parte de los estudiantes podría estar ligado a hechos como la falta de conocimientos previos, la actitud asumida por los mismos, el rol de los docentes como instructores, el tipo y manejo de lenguaje con que cuentan tanto los educandos como los educadores, así como al manejo de una simbología sin contenido o sin conceptos u objetos matemáticos, o bien una combinación de todos estos aspectos.

Es claro entonces que no se puede homologar el uso de la simbología con

la comprensión y uso de los objetos matemáticos; asimismo, dado que el lenguaje depende de los distintos niveles del habla, en las distintas etapas de la vida de la personas, o en los distintos niveles educativos alcanzados, es de suma importancia que, en la medida que el individuo ascienda en la estructura escolar, incremente su bagaje cultural, enriquezca su vocabulario, desarrolle su capacidad lingüística, para que logre una valoración del carácter complejo del significado de los términos y pueda disponer de patrones de comparación cada vez más elaborados, que le permitan tener claro que los problemas de la comprensión y significado están lejos de ser cosas obvias, y que tales problemas no se pueden reducir al análisis lingüístico, aunque no se pueda prescindir de él (Pimm, 2002).

### **El lenguaje en los cursos introductorios de matemáticas**

Los cursos MA 125 Matemática Elemental, MA 230 Matemáticas Para Ciencias Económicas I y MA 1210 Cálculo I de la Universidad de Costa Rica se rigen por la denominadas Cartas al Estudiante, las cuales plantean cuáles son las "reglas de juego" de tales cursos. En el Cuadro 1 se presentan los principales objetivos generales y específicos que se establecen en dichas cartas.

Estos cursos apelan al manejo de las matemáticas a través de un lenguaje que posibilite al estudiante la solución de problemas atinentes a las carreras para las cuales han sido diseñados, haciendo uso de una serie de herramientas cognitivas de trabajo, que permitan modelar una supuesta realidad atinen-

**Cuadro 1. Objetivos de los cursos introductorios de matemáticas en la Universidad de Costa Rica**

<b>MATEMÁTICA ELEMENTAL MA 125</b>	<b>MATEMÁTICAS PARA CS. ECONOMICAS MA 230</b>	<b>CÁLCULO I MA 1210</b>
Favorecer la adquisición de herramientas conceptuales y procedimentales de matemática que el estudiante utilizará durante su carrera.	Aplicar las funciones de variable real para modelar y resolver problemas propios de su área de estudio.	Dotar al estudiante de los conocimientos básicos del cálculo diferencial e integral, en el desarrollo de sus habilidades para resolver problemas matemáticos.
Interpretar y aplicar los conceptos de: función, dominio, codominio, ámbito, gráfico, imagen, preimagen, función creciente, función decreciente, función inyectiva, función sobreyectiva y biyectiva, composición de funciones, función invertible, en el estudio de las funciones: lineal, cuadrática, cúbica, valor absoluto, racional, raíz cuadrada, exponencial, logarítmica y trigonométrica.	Utilizar el cálculo diferencial en una variable como herramienta en la solución de problemas.	Capacitar al estudiante en la resolución de problemas matemáticos, orientando su formación con el fin de que plantee y resuelva, por métodos diferenciales o integrales, diversos problemas de la ciencia y la tecnología.
Resolver problemas que requieran la aplicación o interpretación de una función lineal, cuadrática, exponencial, logarítmica o trigonométrica.		

*Fuente: Cartas al estudiante. Escuela de Matemáticas U.C.R. I Ciclo 2010*

te a las carreras para las cuales fueron diseñados tales cursos, demandando la adquisición de conceptos y procedimientos que sirvan para resolver problemas

matemáticos. Sin embargo, pareciera que el discurso de tales cartas ignora la relación de los contenidos del curso con el lenguaje vernáculo.

De hecho, el lenguaje utilizado en las Cartas a los Estudiantes citadas, deja evidencia de que los programas de dichos cursos procuran que los alumnos aprendan más el lado instrumental y algorítmico (Ortega & Ortega, s.f.) que el lado conceptual de las matemáticas, lo que podría significar que más que aprender a pensar en términos matemáticos lo que se proponen es un aprendizaje algorítmico, instrumental y no significativo, propio de las matemáticas formales, rígidas y descontextualizadas (Zúñiga, 2007; Camarena, 2010), potenciando un manejo simbólico sin relación con los objetos matemáticos a los cuales hace referencia tal simbolismo.

Esto no es más que la continuación del modelo de aprendizaje de las matemáticas, heredado de la educación secundaria, que en el caso de Costa Rica, da un gran peso a la adquisición de algoritmos (García, 2009), los cuales pueden ser asimilados y utilizados de manera correcta aun cuando no signifiquen absolutamente nada para el educando y cuyo principal reflejo se da en los resultados de las pruebas de Matemáticas de Bachillerato (García, 2009) donde los ejercicios de dicha prueba que abordan el manejo de conceptos de forma clara y precisa alcanzan un nivel de éxito muy por debajo de aquellos ejercicios cuya respuesta correcta se puede obtener de manera algorítmica sin recurrir a la asimilación de conceptos matemáticos, haciendo uso de las calculadoras científicas (García, 2009) e incluso, llegando a aritmetizar el álgebra.

### **Lenguaje matemático frente lenguaje vernáculo: ¿una de las claves de la dificultad del aprendizaje?**

Las Cartas a los Estudiantes referidas plantean lo que supuestamente han de ser las matemáticas y su lenguaje: un recurso para intentar describir y responder a problemas susceptibles de acontecer en la realidad. Sin embargo, en el caso de Costa Rica, esta propuesta se basa en un lenguaje caracterizado por el rigor, el formalismo y la abstracción, donde privan la algoritmización y la algebrización de las matemáticas, dándosele un gran peso al uso de la simbología, más que al manejo conceptual, lo que permite alcanzar un nivel de certeza absoluta, indudable, ineludible, inexorable, incontrovertible (González, 2005); por lo que las matemáticas aparecen más ligadas a lo que los libros de texto proponen, evitándose así la realidad "natural" que se expresa a través del lenguaje vernáculo, el cual en muchas ocasiones ni siquiera toma en cuenta la veracidad de los hechos, donde incluso prevalecen las emociones y la intuición.

Esto obliga a destacar la existencia de diferencias de contenido y conceptualización entre muchas palabras, planteadas desde el lenguaje vernáculo frente al lenguaje matemático. En el lenguaje vernáculo una palabra que remite a un concepto se refiere a las cualidades del "objeto hablado", aspecto que incidirá en el carácter polisémico de la palabra; en matemáticas la situación puede ser otra, White (1973) ejemplifica esto al indicar que la cualidad "dos", junto otra vez a la cualidad "dos" produce la cualidad "cuatro", sin que esto necesariamente tenga referencia concreta alguna.

Lo anterior refleja como los objetos matemáticos se pueden definir en razón de sus atributos y por las relaciones entre los mismos (Godino, 2009), de ahí que el "no necesito saber de qué estoy hablando" implica que no se requiere ningún elemento concreto como referencia, una vez que el concepto matemático ha sido "construido"; de esta manera, el lenguaje matemático puede ser manejado exclusivamente desde lo hablado, es decir, desde lo simbólico sin requerir nada más, evidenciando que los conceptos matemáticos pueden remitir a "no-objetos" de manera tal que la conceptualización no necesariamente se basa sobre significados que se apoyen en la realidad ostensiva; donde los conceptos matemáticos requieren servirse de representaciones simbólicas, dejando de lado íconos e índices por no tener referentes naturales y/o no disponer de objetos concretos (D'Amore, 2011), bastándose con el carácter relacional con que se pueda ligar.

Cabe entonces preguntarse ¿en qué circunstancias los conceptos generados por el lenguaje vernáculo coinciden con las interpretaciones y significados que se les da en el lenguaje matemático? ¿Hasta qué punto, tal y como lo plantea Wittgenstein, "los límites de mi lenguaje significan los límites de mi mundo"? (Wittgenstein, 1978, citado por Dobles et al., 1998). ¿Podrán los límites del lenguaje vernáculo de un individuo definir los límites de su lenguaje matemático?

Lo anterior evidencia que las traducciones de un lenguaje a otro difícilmente son isomórficas. Por ejemplo, ¿qué significa "ser igual" en matemáticas frente a su acepción en el lenguaje

vernáculo? En matemáticas igual significa lo mismo o, en el peor de los casos, aquello que es sustituible por su forma, manteniendo una relación de correspondencia en la misma clase de equivalencia, lo que hace intercambiables distintos símbolos cuando se estime conveniente; pero en el lenguaje vernáculo, basta con que las cosas se parezcan o ejerzan la misma función en determinados contextos, es decir que actúen de manera similar, que tengan el mismo valor funcional o de uso, por lo que la igualdad en el lenguaje vernáculo puede no cumplir con el principio de igualdad en matemáticas (Serna, 2000). Lo mismo ocurre con el principio del tercero excluido, de acuerdo con el cual, en matemáticas, las cosas son o no son, sin que haya más opción, pero para el lenguaje vernáculo o cotidiano, debido a la multiplicidad de las acepciones que pueden soportar las palabras, esto puede ser totalmente relativizado debido a que alrededor de una palabra, pueden gravitar multiplicidad de resonancias semánticas.

González (2005) se aprovecha de esto para presentar una serie de "paradojas" que permiten comprender cómo es que un mismo término utilizado por cada uno de estos lenguajes lleva a conclusiones totalmente diferentes.

Lo anterior incide en el hecho de que cuando los estudiantes se presentan a las lecciones de matemática lo hacen con conceptos que han aprendidos previamente y remiten a los significados construidos y aceptados socialmente, los cuales poseen cierto nivel de comunicación según sus "bibliotecas semánticas", las cuales distan mucho de tener todas las acepciones posibles

a las palabras o conceptos que las mismas conllevan, por lo que no pueden operar como un saber enciclopédico (Pimm, 2002) capaces de abarcar la totalidad de sus posibles significados, sino tan solo aquellos que existen en el campo semántico personal, que es en última instancia el "lugar" donde se define su nivel de significatividad y manejo.

Esto se debe a que cuando el educando intenta comprender el significado de un concepto lo remite a su campo semántico personal a pesar de sus limitaciones, para así darle un primer sentido o carácter relacional a pesar de correr el riesgo de que la relación que establezca no llegue a presentarse de manera isomórfica. Lo anterior tiene que ver con el hecho de que el lenguaje de las matemáticas y el lenguaje vernáculo o cotidiano no presentan una plena coincidencia, particularmente por el carácter, muchas veces impreciso, inexacto del lenguaje vernáculo, que se mueve más sobre la base de los borradores de Dennett, pero que sorprendentemente funciona mejor que el lenguaje matemático, ya que refleja distintos estados de la psique de los individuos, en tanto el lenguaje matemático, manejado desde una manera rigurosa, apegado a la forma, tiende a ignorar esto, por lo que podría estar limitando y/o dificultando el poder de traslación de un lenguaje al otro, máxime cuando se trata de conceptos y objetos matemáticos que no existen en el mundo real, o representan generalizaciones tan abstractas como las incógnitas de una ecuación literal. Esto nos lleva a reflexionar sobre si las verdades matemáti-

cas son conceptuales o lingüísticas (Quesada, 1991).

Cuando un profesor toma conciencia del problema de comunicación que implica esa discordancia de contenidos entre el lenguaje vernáculo y el matemático, es posible que pueda intentar manejar su discurso pedagógico a través de los distintos niveles del habla, procurando ajustarse a un lenguaje que, sin perder la significatividad de los objetos matemáticos a ser tratados, procure lograr un nivel de comunicación mínima que posibilite al educando acercarse y hasta llegar en algún momento a realizar la discriminación correcta, así como precisar y utilizar los objetos matemáticos en contextos específicos. Desconocer esto y actuar en la dirección contraria propicia la generación de conflictos cognitivos que no siempre se logran resolver por medio de la negociación, sino más bien por la superposición de significados y sentidos alrededor de un mismo fenómeno o episodio, lo cual suele ser la regla (Serna, 2000), donde ante aquello que no se logra comprender por la fuerza de la razón termine imponiéndose por la razón de la fuerza, cuya manifestación más clara, en el caso de las matemáticas, es un aprendizaje sin comprensión basado en la algoritmización o aritmetización de los conceptos.

Éstas son algunas de las razones que contribuyen a considerar que el lenguaje matemático actúa de una manera dogmática, intolerante, rígida, desnaturalizada, donde la abstracción no significa la abstracción del mundo "natural" sino del mundo autoconstruido por las mismas matemáticas, donde el aprendizaje de esta disciplina resulta artificial y

como un anexo a la realidad, y no como un elemento subyacente de la misma, siendo tal aprendizaje una actividad intelectual no vinculada a un espacio cultural concreto y particular del saber, sino al conocimiento en sí mismo (González, 2005).

Así, en las clases de matemáticas, cuando el docente apela a la "realidad" y a la "imaginación", para el educando no siempre es claro a cuál realidad e imaginación debe dirigir sus pensamientos, si debe recurrir al lenguaje matemático o al lenguaje vernáculo, ya que puede ser que el profesor esté apelando al uso del lenguaje estrictamente matemático, pensando en la realidad y la imaginación matemática, mientras el educando podría estar tratando de visualizar los conceptos solicitados a través de las ideas que le aportarían el lenguaje vernáculo propio de su campo semántico, de manera tal que ambos sujetos estarían en planos distintos, y por ende darían respuestas distintas a un único planteamiento.

Se genera así una lucha de contrarios entre el lenguaje matemático y el lenguaje vernáculo o cotidiano, donde el lenguaje matemático recurre al autoritarismo, se basa en premisas arbitrarias que se toman como verdades absolutas o axiomas, que presenta los hechos como cosas consumadas (González, 2005), máxime si el docente se preocupa más por la forma en como se dicen las cosas, que en el significado que las mismas deberían tener para el alumno (Pimm, 2002).

El hecho de que las matemáticas y su lenguaje sean aprendidos con posterioridad al lenguaje vernáculo debe-

ría llevar a considerar que sus objetos, de alguna manera, existen ligados a la realidad, en interacción con los objetos de ésta, propuestos a través del lenguaje vernáculo, pero el manejo que hace con las matemáticas más bien establece una frontera con la realidad (Quesada, 1991), frontera que, particularmente, se refleja en lo paradójico que resulta la toma de decisiones que efectúan las personas con respecto a los hechos cotidianos de sus vidas.

Frecuentemente se homologa el pensamiento "racional u objetivo" con el pensamiento matemático, asumiéndose que la toma de decisiones desde esta perspectiva debería ser la correcta, en razón del poder interpretativo y concluyente de las matemáticas, en virtud del razonamiento lógico y analítico que ostentan y que se manifiesta a través del lenguaje matemático, frente al pensamiento "subjetivo o emocional" determinado por factores subjetivos y emocionales cuya manifestación más concluyente se da a través del lenguaje vernáculo. Sin embargo, son precisamente los factores subjetivos y emocionales y no la razón los elementos que influyen en la toma general de decisiones (Goleman, 2000; Turabián & Pérez, 2005), ya que mientras el método matemático (de toma de decisiones) tiende a recoger mucha información que se vuelve irrelevante o inerte, lo que hace que la toma de decisiones sea muy tardada, generalmente las decisiones se basan en aquello que el individuo asume como trascendentes y que a su parecer contribuyen a dar respuesta a la situación que se enfrenta, cuya principal manifestación se da a través del lenguaje vernáculo.

Lo anterior se debe a que los factores subjetivos, manifestados a través del lenguaje vernáculo, conllevan a una evaluación de las implicaciones que la situación o el evento tiene para el organismo, donde tales decisiones parten de un chequeo de atribución causa-efecto, probabilidad del resultado, discrepancia entre lo ocurrido y lo esperado, facilitación de metas, urgencia de dar una respuesta ante el evento que está siendo valorado, interviniendo en todo ello la memoria, la motivación y el razonamiento (Jiménez & Mallo, 1989), de manera tal que la toma de decisiones se ve afectada por la presentación de experiencias emocionales, las cuales permiten un número ilimitado de significados posibles para los seres humanos.

Se plantea, así, la necesidad de una nueva reflexión sobre las razones que generan problemas en el aprendizaje de las matemáticas en los educandos, ya que aparte de las clásicas razones como la falta de conocimientos previos o los aspectos actitudinales, las dificultades de dicho aprendizaje podrían estar siendo considerablemente afectadas por las discrepancias entre el lenguaje vernáculo y/o los campos semánticos del educando y su relación con el lenguaje matemático.

### **Conclusiones**

Es claro que existe una relación dialéctica entre el lenguaje cotidiano o vernáculo y el lenguaje matemático, donde, a nuestro parecer, cuando el individuo posee un lenguaje vernáculo o cotidiano, rico en conceptos y sus

acepciones, es posible que pueda utilizar múltiples recursos lingüísticos para potenciar el adquirir, desarrollar y manejar su lenguaje matemático. El logro de esto depende de una "contextualización" del lenguaje matemático, que permita "reflejar" una realidad, que no es aquella que le corresponde por definición, sino como producto de la interacción social. Indudablemente la riqueza del lenguaje cotidiano contribuye a que sea posible mejorar el manejo del lenguaje matemático, aunque no lo garantiza.

El campo docente, y particularmente los docentes universitarios, deben reconocer que el reto que plantea el aprendizaje de las matemáticas no lo pueden enfrentar aduciendo que el mismo es exógeno a sus aulas, sino que tendrá que ser dentro de las mismas. Para enfrentar este reto deben reconocer que la dificultad del aprendizaje de la disciplina tiene muchos factores; uno de ellos, posiblemente, lo constituye la diferencia que existe entre el lenguaje vernáculo o cotidiano y el lenguaje matemático, entre el lenguaje que él utiliza y el que maneja el educando, ya que los problemas del aprendizaje de las matemáticas en la escuela, antes de ser de orden epistemológico, se ubican inicialmente en el ambiente socio-cultural (D'Amore, 2011). De esta manera, el docente puede ser parte del problema, si su discurso en clase no diferencia entre estos dos lenguajes, si no logra establecer la relación entre lo que él "habla" y su correspondencia con lo que el educando "escucha", pues de lo contrario, irremediablemente, el educando no alcanzará los objetivos propuestos para el curso.

La superación de la relación dialéctica profesor-lenguaje matemático frente a estudiante-lenguaje vernáculo o cotidiano no se puede resolver sobre la base de la imposición del lenguaje matemático sobre el lenguaje vernáculo o cotidiano, sino que demanda una toma de conciencia que permita una negocia-

ción de contenidos y conceptos que ayuden al educando a crecer en el manejo de su propio lenguaje, en tanto crece en la disciplina.

**Original recibido: 04-11-2010**

**Original aceptado: 28-08-2011**

## Referencias bibliográficas

- Alcalá, M. (2002). *La construcción del lenguaje matemático*. Barcelona: Grao.
- Barrón, D. (1979). *En torno al lenguaje*. Manuscrito no publicado, Biblioteca de la Sede Guanacaste de la Universidad de Costa Rica.
- Camarena, P. (2010). *La modelación matemática en la formación del ingeniero*. Recuperado el 29 de enero de 2011, de [http://www.m2real.org/IMG/pdf\\_Patricia\\_Camarena\\_Gallardo-II.pdf](http://www.m2real.org/IMG/pdf_Patricia_Camarena_Gallardo-II.pdf)
- Chomsky, N. (1977). *El lenguaje y el entendimiento*. Barcelona: Seix Barral.
- Chomsky, N. (1981). *Reflexiones acerca del lenguaje. Adquisición de las estructuras cognitivas*. México: Trillas.
- D'Amore, B. (2011). Conceptualización, registros de representaciones semióticas y noética: interacciones constructivistas en el aprendizaje de los conceptos matemáticos e hipótesis sobre algunos factores que inhiben la devolución. *Revista Científica. Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá, 11*. Recuperado el 27 de junio de 2011, de <http://www.dm.unibo.it/rsddm/it/articoli/damore/740%20Conceptualizacion.pdf>
- Dobles, M., Zúñiga, M. & García, J. (1998). *Investigación en educación: procesos, interacciones y construcciones*. San José, Costa Rica: Editorial Universidad Estatal a Distancia.
- Frade, L. (2009). *Desarrollo de competencias en educación: desde preescolar hasta el bachillerato*. México: Inteligencia Educativa.
- García, J. (2009). El aprendizaje de las matemáticas y la obtención de la respuesta correcta. *Revista Intersedes, 16*, 115-133.
- Gardner, H. (1995). *Las inteligencias múltiples. La teoría en la práctica*. Barcelona: Paidós Ibérica.

Godino, J. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathematiques*, vol 22. Recuperado el 15 de junio de 2011, de [http://www.ugr.es/~jgodino/indice\\_eos.htm](http://www.ugr.es/~jgodino/indice_eos.htm)

Godino, J. (2009). *Marcos teóricos de referencia sobre la cognición matemática*. Recuperado el 26 de junio de 2011, de <http://cimm.ucr.ac.cr/ojs/index.php/eudoxus/article/view/333>

Goleman, D. (2000). *La inteligencia emocional*. Buenos Aires: Javier Vergara.

González, P. (2005). *Matemática y lenguaje y matemática como lenguaje*. Recuperado el 15 de mayo de 2010, de <http://divulgamat.ehu.es/weborriak/.../LecInaugl0506PMGU.pdf>

Hardy, T. & Jackson, R. (1998). *Aprendizaje y cognición*. Madrid: Prentice Hall.

Hildebrandt, M. (2008). *Niveles del habla*. *Academia Peruana de la Lengua*. Recuperado el 27 de junio de 2011, de [http://academiaperuanadelalengua.org/.../niveles\\_de\\_habla](http://academiaperuanadelalengua.org/.../niveles_de_habla)

Jiménez, A. & Mallo, M. (1989). *Reconocimiento de emociones a partir de descripciones verbales*. Recuperado el 15 de junio de 2010, de [http://dialnet.unirioja.es/servlet/fichero\\_articulo?codigo=2903501&orden=0](http://dialnet.unirioja.es/servlet/fichero_articulo?codigo=2903501&orden=0)

Kline, M. (1976). *El fracaso de la matemática moderna*. Madrid: Siglo XXI.

Lacué, E. (2011). Enseñanza y aprendizaje de los sistemas matemáticos de símbolos. *DIDAC*. N° 56-57, pp. 29-35. Recuperado el 5 de julio de 2011, de <http://www.uia.mx/web/files/didac/56-57.pdf>

Larraga, M. (s.f.). *Evolución del lenguaje oral*. Recuperado el 03 de abril de 2010, de [http://www.quadernsdigitals.net/index.php?accionMenu=hemeroteca.DescargaArticuloIU.descarga&tipo=PDF&articulo\\_id=6074](http://www.quadernsdigitals.net/index.php?accionMenu=hemeroteca.DescargaArticuloIU.descarga&tipo=PDF&articulo_id=6074)

Ortega, J. F. & Ortega, J. A. (s.f.). *Matemáticas: ¿Un problema de lenguaje?* Recuperado el 2 de junio de 2010, de <http://eco-mat.ccee.uma.es/asepuma/laspalmas2001/laspalmas/Doco06.PDF>

Papalia, D., Wendkos, S. & Duskin, R. (2001). *Desarrollo humano*. Bogotá: Mc Graw-Hill Interamericana.

Papini, M. (2003, marzo). Algunas explicaciones vigotskianas para los primeros aprendizajes del álgebra. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, año 6, N° 001. Recuperado el 13 de junio de 2010, de <http://www.clame.org.mx/relime/20030103.pdf>

Pimm, D. (2002). *El lenguaje matemático en el aula*. Madrid: Ediciones Morata y Ministerio de Educación, Cultura y Deporte.

Puente, A. (2007). *Cognición y aprendizaje. Fundamentos psicológicos*. Madrid: Pirámide.

- Puig, L. (1994). *Semiótica y matemáticas*. Working paper volumen 51. Valencia: Colectivo Eutopías y Ediciones Episteme. Recuperado el 28 de junio de 2011, de <http://www.uv.es/puigl/sm.pdf>
- Puig, L. (2003). Signos, textos y sistemas matemáticos de signos. En E. Filloy (Ed.), *Matemática educativa: aspectos de la investigación actual* (pp. 174-186). México: Fondo de Cultura Económica / CINVESTAV. Recuperado el 25 de junio de 2011, de <http://www.uv.es/puigl/textos.htm>
- Quesada, D. (1991). ¿Es la matemática un lenguaje? *Revista de Filosofía*, 5. Recuperado el 27 de junio de 2011, de <http://revistas.ucm.es/fsl/00348244/articulos/RESF9191120002A.PDF>
- Radfor, L. (2006). Semiótica y educación matemática. *RELIME. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, Vol. 9, N° Extra 1. Recuperado el 26 de junio de 2011, de <http://dialnet.unirioja.es/servlet/revista?codigo=7978>
- Ramos, E. (s.f.). *Tesina sobre el lenguaje (Anatomía, evolución, teorías, lenguaje y pensamiento, glosario)*. Recuperado el 11 de mayo de 2010, de <http://www.psicopedagogia.com/articulos/?articulo=343>
- Schulte-Herbrüggen, H. (1985). *El lenguaje: un medio para apropiarse mentalmente del mundo*. San José, Costa Rica: Editorial Nueva Década.
- Seco, M. (s.f.). *El hablante ante la lengua*. Manuscrito no publicado. Biblioteca de la Sede Guanacaste de la Universidad de Costa Rica.
- Serna, J. (2000). *Lógica y literatura*. Recuperado el 5 de junio de 2010 de <http://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=853185>
- Swadesh, M. (s.f.). *Costumbres verbales*. Manuscrito no publicado. Biblioteca de la Sede Guanacaste de la Universidad de Costa Rica.
- Turabián, J. & Pérez, B. (2005). La emoción y la intuición como herramientas para gestionar la incertidumbre en la toma de decisiones en medicina de familia. *Aten Primaria*, 35 (6), 78-82. Recuperado el 28 de junio de 2011, de <http://www.elsevier.es/sites/default/files/elsevier/pdf/27/27v35n06a13073417pdf001.pdf>
- Vigotsky, L. (2005). *Pensamiento y lenguaje*. La Habana: Editorial Pueblo y Educación.
- White, S. (1973). *Matemáticas. Nueva pedagogía*. Barcelona: Ediciones de Promoción Cultural.
- Zúñiga, L. (2007, marzo). El cálculo en carreras de ingeniería: un estudio cognitivo. *RELIME. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, vol 10, N° 001, 145-175. Recuperado el 29 de enero de 2011, de <http://www.clame.org.mx/relime/20070107.pdf>