

IMÁGENES EN LA ENSEÑANZA DE ABSTRACCIONES FORMALES

Autor/es: MARTINS, Marcela; ACERO, Fernando

Dirección electrónica de referencia: mmartins@fi.uba.ar

Procedencia Institucional: Universidad de Buenos Aires. Facultad de Ingeniería

Eje Temático: Las tecnologías de la información y la comunicación

Palabras clave: Imágenes, visualización, abstracción

Resumen

El pensamiento visual entendido como aquel que involucra figuras percibidas o imaginadas es usado profusamente en la matemática en todos los niveles, atravesando diversos temas y clases de actividad matemática. El poder persuasivo y motivacional de las imágenes, derivado de su ubicuidad en la red, potencia su efecto epistemológico, siempre que puedan crearse estrategias de enseñanza que las incluyan. ¿El lenguaje de las imágenes es compatible con la enseñanza de disciplinas abstractas? Este trabajo responde que hasta las abstracciones puras, propias de un sistema axiomático formal como el del álgebra lineal, admiten presentaciones en registros gráficos que potencian las oportunidades de aprendizaje. ENTORNO CONCEPTUAL. Las nociones de *registro semiótico* y de *abstracción* caracterizadas por el AMT (*Advanced Mathematical Thinking*) permiten diseñar y estimar la potencia cognitiva de las imágenes, siempre que se puedan presentar acopladas. METODOLOGÍA. Seleccionado un tópico de máxima abstracción en una disciplina abstracta (álgebra lineal), se producen con un software (matlab) imágenes que capturan las nociones esenciales a ser enseñadas. RESULTADOS. Se monta un acoplamiento entre las imágenes generadas y el texto algebraico sobre una plataforma que permite efectuar las conversiones entre registros que potencias el aprendizaje. Las líneas de código obtenidas pueden ser retocadas por docentes sin conocimientos de computación para extender y transferir estos acoplamientos a un amplio conjunto de temas que incluyan el álgebra lineal. La integración imagen-texto constituye una tecnología intelectual que aumenta las posibilidades de comprensión. El producto se inserta en la plataforma virtual de la Facultad de Ingeniería (UBA).

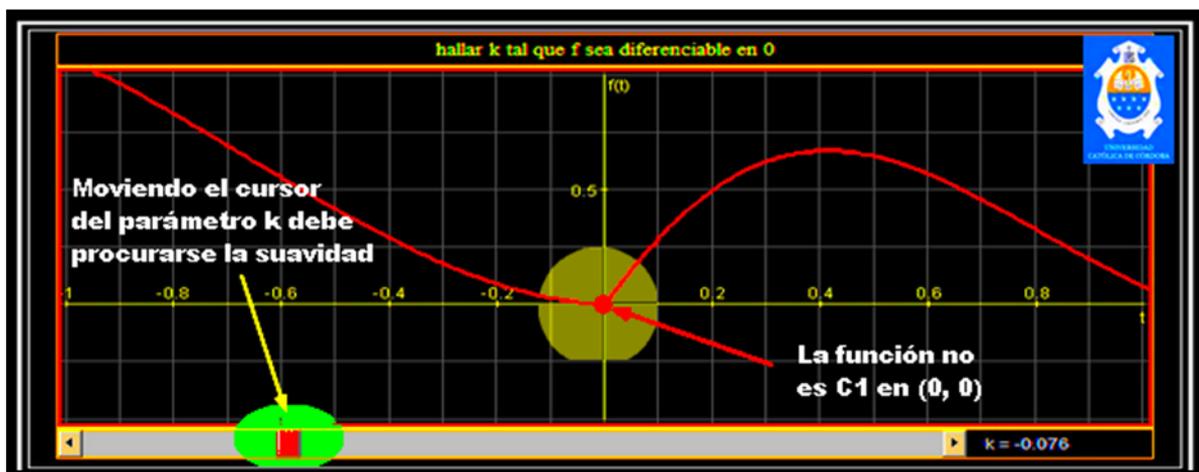
1. Introducción

La visualización ha tenido diversos tratamientos y apreciaciones a lo largo de los diversos períodos del desarrollo en la matemática; actualmente ha adquirido relevancia su *status* epistemológico. El pensamiento visual entendido como aquel que involucra figuras percibidas o imaginadas es usado profusamente en la matemática en todos los niveles, atravesando todos los temas y en diversas clases de actividad matemática. Su utilidad, en ocasiones relegada al plano heurístico, persuasivo y motivacional: “La importancia del pensamiento visual en la matemática, entonces, no es nueva. Pero una muy influyente visión, todavía prevaleciente, es que la utilidad de la visualización en matemática es solo psicológica, no epistemológica” (Giaquinto, 2007, pág. 1). La visualización, en esta visión, podría contribuir a ilustrar algún conocimiento ya adquirido, o a lo sumo, aclarar las confusiones que podrían surgir para delimitar el alcance de algunos términos, o sugerir una idea que pueda contribuir a una mejor comprensión de un material definitivo. “Las imágenes o diagramas podrían ilustrar casos de una definición, proporcionándonos una vívida impresión de sus aplicaciones; podrían ayudarnos a comprender la descripción de una situación en matemática o los pasos en algún razonamiento detallado; podrían sugerirnos una conjetura para la investigación o una idea para realizar una prueba. Las representaciones visuales tienen así un rol de facilitar el pensamiento. Pero eso es todo en esta visión” (Giaquinto, 2007, pág. 1)¹. La declaración: “Depuis les Grecs, qui dit mathématique dit démonstration” (Bourbaki, 1977, pág. E17)².

La visualización estaría relegada al margen, sin concedérsele la posibilidad de añadir contenido matemático a un problema o un planteo. El desplazamiento de la visualización es evidente en Mario Bunge: “reconocemos igualmente que la evidencia no funciona como criterio de verdad, y que las pruebas no pueden darse tan sólo por medio de figuras pues los razonamientos son invisibles” (Bunge, 2001, pág. 3). Para el mismo autor, la intuición que puede ser a lo sumo fuente de conjeturas que deben ulteriormente ser sometidas a prueba: “peut être une source de progrès lorsque ses productions – en général des conjectures grossières – sont élaborées et mises à l’épreuve” (Bunge, 2001, pág. 3), o en todo caso puede ayudar a plantear cuestiones, mas no a resolverlas. En su concepción, las intuiciones que una representación visual podrían sugerir son algo así como material en bruto que

sin refinación del entendimiento puro, resulta prácticamente inutilizable: “Les produits de l’intuition sont grossiers au point d’être souvent inutilisables; il faut les élucider, les préciser, les compléter” (Bunge, 2001, pág. 193)³. Las limitaciones de la visualización geométrica han sido muchas veces traducidas como una limitación de cualquier tipo de visualización, y para poner un ejemplo del mismo autor, considérese la noción de órdenes de suavidad de una función y sus correspondientes correlatos visuales a través de su gráfica. La continuidad de orden cero de una función tiene una objetivación sensible ya que, de no verificarse en un punto t_0 del dominio de la función, introduce un salto que se localiza como una interrupción vertical sobre la recta de ecuación $t = t_0$ en la gráfica que la representa; por otra parte, si la función tiene en ese punto una suavidad de orden 0 pero no de orden 1, también podrá detectarse una repercusión visible introduciendo un punto anguloso en la gráfica. De allí en más, las posibilidades de la visualización se van desvaneciendo: una curva suave de orden 1 pero no de orden 2 es difícilmente apreciable a la vista, mientras que ninguna posibilidad subsiste ya en los órdenes superiores de suavidad⁴. Lo que el párrafo detalla es la imposibilidad visual con el grado de resolución de la vista humana; sin embargo no se sigue de allí una imposibilidad de otro tipo de percepción de la discontinuidad de segundo orden. Las carreteras –todas– empalman sus tramos rectos con curvas que son continuas hasta el orden 1 y discontinuas de orden 2, y todo conductor que la practica advierte que ha ingresado a la curva –o que la ha abandonado– por la introducción de la fuerza centrípeta impuesta por su trayectoria curvilínea⁵.

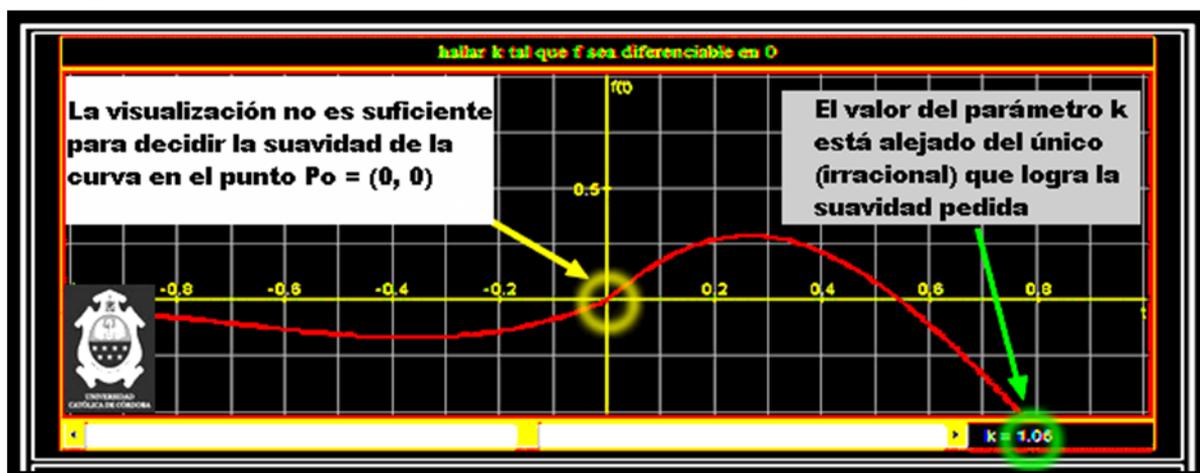
Figura 1. Applet para visualizar una curva C^0 que se debe convertir en una curva C^1 manipulando el control deslizante inferior que controla el parámetro k que interviene en la definición de las dos ramas de la función



Fuente: elaboración propia con los *applets* configurables del proyecto JVM (<http://math.hws.edu.eck>)

La figura 1 muestra la captura del estado transitorio de un *applet*⁶ construido por el autor que, ilustrando la observación de Bunge, manifiesta también que aun siendo válida, la visualización puede seguir prestando un servicio, precisamente haciendo evidente esa imposibilidad. El *applet* propone el juego de mover el cursor de la parte inferior de la figura hasta alcanzar la suavidad de la curva que grafica la función. Desde luego, el cursor está incrustado como parte de la definición de la función por ramas cuyo gráfico es la curva que se muestra en el panel central, donde también se ha señalado con un pequeño círculo el lugar donde se pierde la diferenciabilidad⁷. El *applet* está diseñado de manera que la suavidad se alcance en un valor irracional del parámetro ($k_0 = \frac{1}{2} \pi$), y por lo tanto no alcanzable ya no por este *applet* sino por ninguno, ya que el espacio de valores accesibles por una máquina digital es un subconjunto de los racionales \mathbb{Q} . La manipulación podrá dar la impresión de la suavidad de la curva, pero no la solución del problema está, por su misma naturaleza, fuera del alcance de la visualización: precisamente, comprender esa imposibilidad, tiene valor matemático. La figura 2 muestra que la suavidad parece alcanzarse desde valores todavía muy alejados del que resuelve el juego planteado.

Figura 2. La imposibilidad de visualizar la suavidad de la curva aun para valores alejados de $k_0 = \frac{1}{2} \pi$



Fuente: elaboración propia con *applets* configurables del proyecto JVM

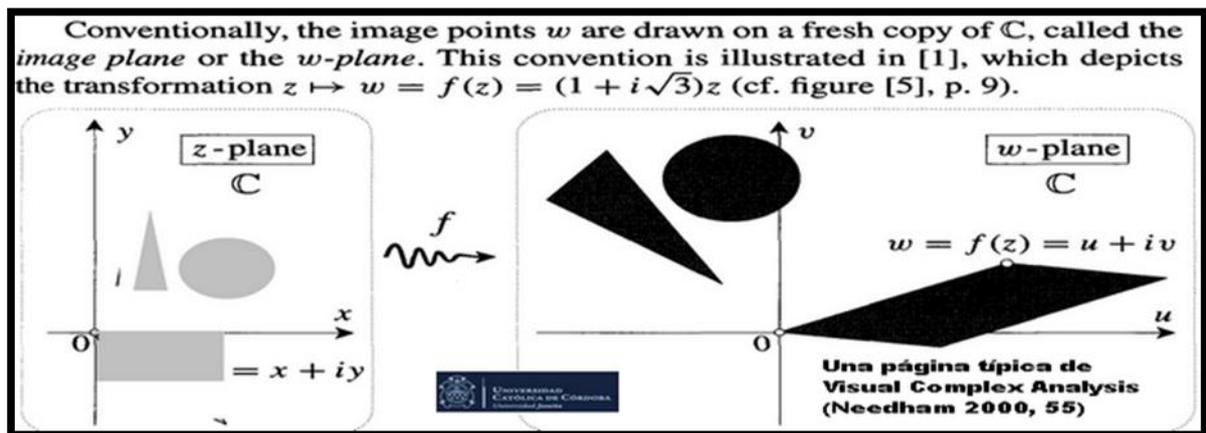
En lo que respecta a las potencias de la visualización, se le asigna un papel importante en la resolución de problemas (Willingham, 2007, pág. 272) y en la comprensión de las relaciones espaciales (Jacob & Jeannerod, 2003, pág. xiii). También se destaca que las imágenes mentales permiten transformaciones de los objetos involucrados con mayor libertad que en el mundo físico (Pylyshyn, 2003, pág. 431): por ejemplo, las curvas de las figuras 1 y 2 pueden tomar cuatro mil

posiciones con solo deslizar un cursor, mientras que el mismo experimento con un lápiz y papel se torna impracticable.

En Kant la intuición –inteligible– es parte del conocimiento matemático, que es conocimiento “a base de la *construcción* de conceptos [...] no puede hacer nada con el mero concepto, sino que se dirige enseguida a la intuición, en la cual considera al concepto *in concreto*, aunque no empíricamente sino solo en una intuición que exhibe *a priori*, es decir que ella ha construido” (Kant, 2004, págs. 428-429). La perspectiva kantiana de fines del siglo XVIII no solo pierde fuerzas hacia fines del siglo XIX, sino que entre los matemáticos se presenta una profunda desconfianza hacia los productos de la intuición –sensible– que consideraban la fuente de errores y malentendidos, además de vaguedades inadmisibles a un aceptable tratamiento de los objetos matemáticos, y para ello son citados casos notables que prueban la incapacidad de la intuición para concebir objetos como una curva que pasa por todos los puntos de un cuadrado, o de funciones continuas no diferenciables en ninguno de sus puntos. La visualización cae de modo manifiesto en libros de texto que se promocionan como excelentes por la ausencia de figuras según se extrae de la conocida frase de Bertrand Russell, que declaraba que “en los mejores libros, no hay figura alguna”. Un ejemplo de un libro de texto tal es del prestigioso profesor de la Universidad de Göttingen, Edmund Landau, *Differential and Integral Calculus*, sin ninguna figura en sus casi cuatrocientas páginas (Landau, 1951). El interés por el fenómeno de visualización reaparece lentamente desde la segunda mitad del siglo XX con el desarrollo de la psicología cognitiva que entiende por *visualización* la habilidad de almacenar y recuperar representaciones de estímulos ambientales, incluidos los símbolos gráficos utilizados para representar la palabra escrita (Nadel, 2003, pág. 923).

Los libros de texto, que normalmente exponen un estado consolidado de los conocimientos y su forma de presentarlos, ahora cambian en sus presentaciones y anuncian la cantidad de figuras que incluyen.

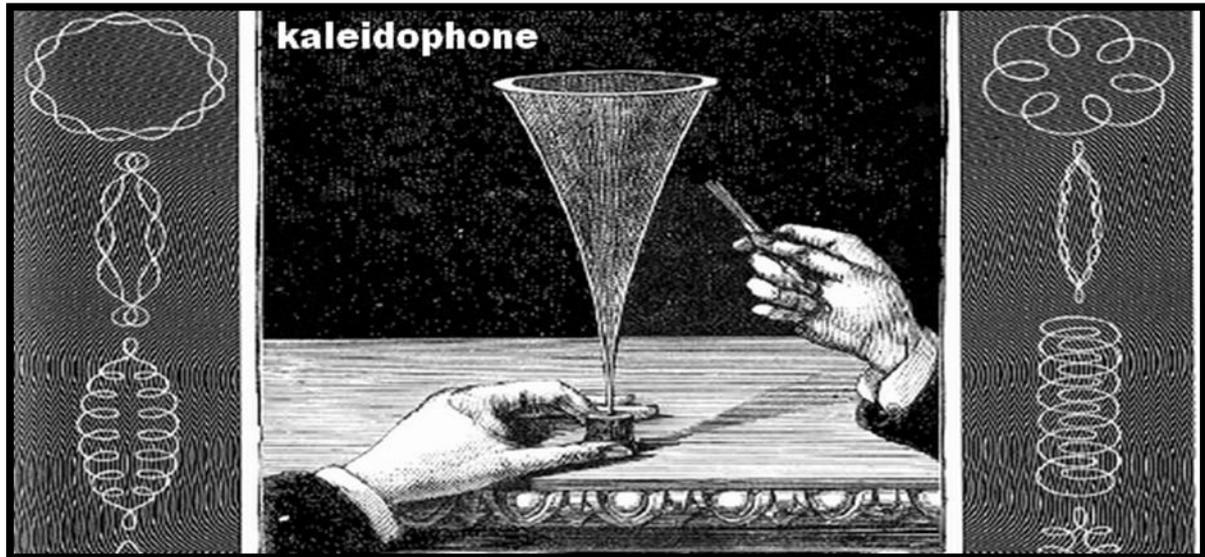
Figura 3. Las imágenes reapareciendo en la matemática avanzada



Fuente: (Needham, 2000, pág. 55)

Para citar un ejemplo (ver figura 3) *Visual Complex Analysis* (Needham, 2000), en cuyo prefacio el autor compara la iconoclastia con la de una sociedad imaginaria con sus habitantes leyendo partituras musicales, pero ninguno escuchando música. Tampoco considera que esa costumbre de limitar las imágenes se haya extinguido: “muy probablemente, al abrir un texto de matemática al azar, se encuentren razonamientos en un lenguaje abstracto simbólico desconectado de cualquier experiencia mundana, a pesar de que muchos de los objetos que se están presentando fueran descubiertos por una intuición geométrica” (Needham, 2000). Estas conexiones entre matemática y música han sido objeto de visualizaciones. Los problemas matemáticos asociados con los movimientos oscilatorios armónicos involucran ecuaciones diferenciales en derivadas parciales cuyas soluciones expresadas en el registro simbólico exigen habilidades cognitivas que se hallan en los rangos más elevados del espectro, al demandar la distinción entre parámetros y variables. El modo en que los parámetros varían estructuralmente las soluciones para dar origen a los diversos armónicos, la posibilidad de seleccionar un juego de parámetros que conduzca a una configuración específica, o las interacciones entre ellos para aproximar fenómenos de resonancia, en fin, cuanto pertenece a la *matemática de la música*, puede ser visualizado con los genéricamente denominados *armonógrafos*. El nombre designa cualquier ingenio capaz de permitir una representación visual de las soluciones de ecuaciones diferenciales asociadas a cuerdas o varillas vibrantes.

Figura 4. Matemática de la música: El kaleidophone (Sir Charles Wheatstone en 1827) y algunas armónicas



Fuente: (Ashton, 2013, pág. 45)

En la figura 4 puede verse en la parte central el *kaleidophone*, así denominado por su inventor, Sir Charles Wheatstone, varilla de acero fija inferiormente que tiene fijada en su extremo superior una perla plateada, y cuyos movimientos tras una percusión inicial pueden verse haciéndose incidir una haz de luz sobre el aparato. Proyectándolo sobre una pantalla, en los paneles laterales de la figura 4 se ven algunos de los armónicos, los primeros de los cuales se representan en la figura 5⁸.

Figura 5. Los primeros armónicos del *kaleidophone*



Fuente: (Ashton, 2013, pág. 45)

En el panorama general así trazado, el interés por la visualización surgido en las últimas dos décadas es tan notable que ha sido denominado el *renacimiento de la visualización*, para contraponerlo al período en que había caído en la desconfianza⁹. El fenómeno se atribuye a los desarrollos en varias áreas “incluyendo las ciencias de la computación, la matemática, la didáctica de la matemática, la psicología cognitiva y la filosofía” (Mancosu, Jörgensen, & Pedersen, 2005, pág. 13)¹⁰. Si se toma la visualización en un sentido bastante amplio, que de modo muy genérico permite hablar de *visualizar* como la acción de representarse en la mente –o en el papel, o

en la pantalla– una imagen de un concepto abstracto. De modo más específico, diversas definiciones perfilan los rasgos esenciales de la visualización en conexión con la matemática avanzada. Así, *imagen visual* “es una construcción mental que representa información” (Presmeg, 2006, pág. 206). Otra definición presenta la *visualización* como “la habilidad, el proceso y el producto de la creación, interpretación, utilización y reflexión acerca de imágenes, figuras o diagramas, en nuestra mente, en papel o mediante herramientas tecnológicas, con el propósito de representar y comunicar información, reflexionar y desarrollar ideas y avanzar en la comprensión de conceptos (Arcavi, 2003, pág. 216).

En los términos inclusivos de esta última definición, este artículo muestra los fundamentos del proceso de creación, como así también el producto de la visualización cristalizado mediante herramientas tecnológicas, en el campo de la enseñanza del álgebra lineal. Se muestra que las imágenes generadas pueden ser puestas en correspondencia con procesos de pensamiento o con los objetos matemáticos abstractos que se pretende introducir.

2. Referentes teórico-conceptuales

El marco conceptual que permite construir y analizar los objetos en este trabajo se inscribe en el AMT (*Advanced Mathematical Thinking*), corriente de investigación del paradigma cognitivo. En esta sección se recorta el ámbito teórico pertinente al problema de la visualización. La denominada teoría de la codificación dual (*dual coding theory*) supone la existencia de dos sistemas de procesamiento de la información, según el formato en que ella está presentada: un sistema verbal que procesa los enunciados y sus construcciones, y un sistema no verbal que procesa la información representada por figuras, diagramas, esquemas. Estos sistemas procesan la información en paralelo y en forma independiente, pero pueden conectarse entre sí, siempre que exista alguna conexión entre el lenguaje icónico y el lenguaje verbal. Tales conexiones potenciarían la comprensión del contenido de información incluido en cada uno de los formatos, resultando además en un aumento de la retención (Paivio, 1971; Tall, 1991a; Paivio, 1986; Phillips, Norris, & Macnab, 2010; Tall, 2011)¹¹. Se presume que la presentación simultánea de la misma información en formato verbal y en formato de imágenes activa a la vez sendas estrategias de comprensión que se potencian, siempre que se trate, efectivamente, de un *mismo* concepto: “ambos sistemas tienen la capacidad de funcionar de un

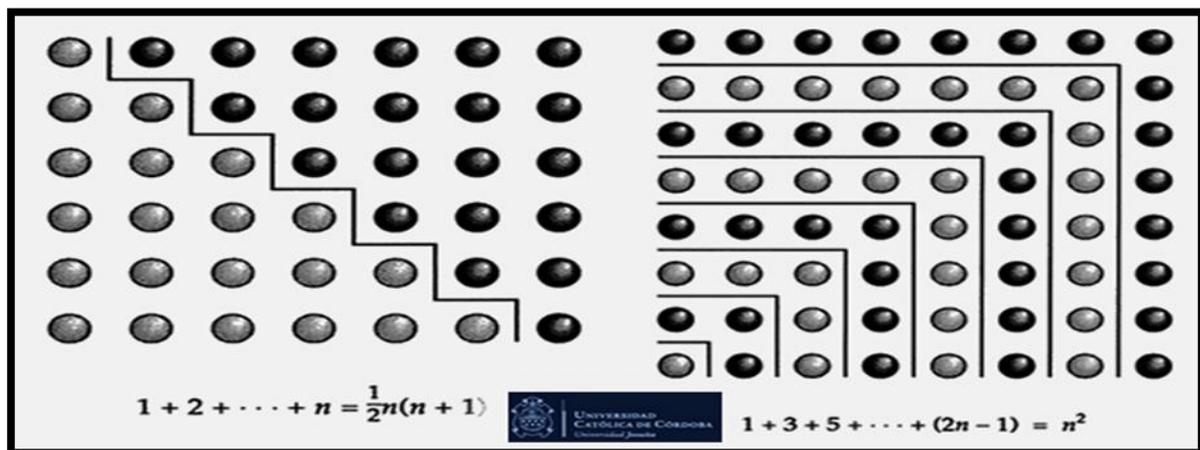
modo dinámico y flexible, para reorganizar, manipular, o transformar la información cognitiva” (Paivio, 1971, pág. 7). Desde esta perspectiva, el diseño de artefactos para la enseñanza de la matemática debería presentar la información en simultáneo, cuidando que se reduzca a un mismo concepto suficientemente acotado para no generar dispersiones, o inducir conexiones impropias de del objeto mismo. Conviene mencionar que conviven dentro del mismo paradigma otras dos que proponen hipótesis con distintos enfoques al momento de modelar la comprensión a través de las imágenes; la segunda perspectiva no es incompatible con la primera, mientras que la tercera participa de algunos puntos de vista de ambas. En el segundo modelo, se propone una explicación de la eficiencia de las imágenes por su estructura visual-espacial que permite el procesamiento de la información con menor cantidad de transformaciones cognitivas, liberando espacio de procesamiento. La tercera perspectiva plantea la hipótesis de la retención conjunta¹². Para los propósitos de este trabajo es innecesaria la discusión de la validez de uno u otro modelo, considerando que los tres coinciden en los efectos probables de la presentación de la información en distintos formatos¹³.

En cuanto a lo que se refiere a los objetos propios de las áreas de conocimiento escogidas, puede decirse que se ajustan a una caracterización ontológica de los objetos matemáticos, según la cual no existe una sola representación de objeto real alguno que pueda ser considerado un representante perfecto, siendo entonces necesaria mas de una representación para mejor posicionar conceptualmente al objeto matemático. En cualquier caso, se añade, que ninguna colección de representaciones cubre todas las dimensiones del objeto por completo (Pluvinage, 1998, págs. 1-16; Duval, 1998, pág. 185). En esta concepción no se puede hablar de un concepto sin dar, a su vez, alguna representación de él; estas representaciones se logran en un dado formato, utilizando un lenguaje que reconoce sus propias reglas gramáticas y sintácticas. A cada una de tales representaciones, que remiten a un aspecto específico del concepto se le denomina *registro semiótico*: una construcción realizada mediante signos pertenecientes a un sistema de representación con sus propias leyes de conexiones entre significados y significantes. Estos modos de representar los objetos matemáticos pueden agruparse en tres *registros* denominados *gráfico* (por ejemplo, una flecha representando un vector), *aritmético* (una n -upla para el mismo vector), o *simbólico* (ahora del vector sólo queda su pertenencia a una estructura de espacio vectorial sin

ninguna otra nota adicional). En la bibliografía técnica también se habla también de *lenguajes* en lugar de registros, de modo que, con algunos matices, el lenguaje llamado por algunos autores 'geométrico' admitiría una correspondencia ajustada con el registro *gráfico*, el llamado lenguaje *algebraico* se aparearía con el *aritmético* y el denominado *abstracto* estaría representado por el registro *simbólico*. Esta clasificación tiene como *fundamentum divisionis* el tipo de pensamiento que los anima. Así, el pensamiento que la corriente del pensamiento matemático avanzado ha denominado *sintético geométrico* se corresponde al primero de los lenguajes; un ejemplo residente en el álgebra lineal diría que la ortogonalidad de vectores en \mathbb{R}^2 suscita el pensamiento de las posiciones relativas de un par de flechas perpendiculares. El *pensamiento sintético-analítico*, en cambio, es el que informa al segundo lenguaje, y aquí la referida ortogonalidad es concebida en términos de la anulación del producto escalar canónico introducido en \mathbb{R}^2 . El *pensamiento analítico estructural*, finalmente, actúa como plataforma del tercer lenguaje; la ortogonalidad es ahora bastante más flexible, ya que queda definida a través de la introducción de un producto interno en un espacio hermítico. La ortogonalidad está ya en la abstracción pura, ya que puede decidirse que dos cualesquiera vectores linealmente independientes en \mathbb{R}^2 sean ortogonales, y *a posteriori*, introducir la geometría que valida esa elección, que por otro lado no es única (Dorier, 2002, págs. 878-889). De esta manera, la comprensión del discurso en los niveles de la matemática avanzada supone niveles de abstracción que no se alcanzan a menos que el estudiante tenga a su alcance la posibilidad de acceder a algún tipo de representación en el que venga envuelta esa abstracción; aunque "la representación resultará cognitivamente parcial respecto a lo que ella representa" (Duval, 1998, pág. 85). En la misma dirección "aunque es importante tener muchas representaciones de un concepto, su existencia no es suficiente garantía de una flexibilidad en el uso de tales representaciones para la resolución de problemas" (Dreyfus, 1991, pág. 32). El mismo Duval destaca algunos aspectos de la relación entre objetos matemáticos y sus representaciones, como el carácter paradójico del conocimiento matemático, según el cual sólo es posible conocer los objetos matemáticos a través de sus representaciones semióticas. La evolución de la matemática ha estado vinculada al desarrollo de diversos sistemas semióticos a partir de la dualidad cognitiva lenguaje-imagen; así, la notación simbólica surgida del lenguaje escrito ha originado la expresión algebraica y, desde el siglo XIX, los lenguajes formales.

Cada sistema semiótico tiene métodos de representación y procesamiento de la información. La matemática requiere la activación simultánea de varios registros semióticos, cuyo funcionamiento es indispensable conocer. Existen transformaciones, denominadas por Duval *tratamientos* que tienen lugar en el mismo sistema de representación, tales como los cálculos aritméticos o las transformaciones algebraicas y las transformaciones geométricas, tales como los movimientos planos (rotación, traslación...). Otras transformaciones involucran más de un sistema de representación, como por ejemplo la representación de una función en un gráfico cartesiano, que Duval denomina *conversión* (Duval, 1999, págs. 4-9). La *flexibilidad cognitiva* es la capacidad que le exige al alumno la multiplicidad de registros de representación de una dada noción, a la vez que la oportunidad para adquirir el conocimiento a partir de relaciones múltiples. Más que en el formalismo mismo, el origen de las dificultades de los estudiantes con el álgebra pareciera deberse a la imposibilidad de *convertirlo* en otros registros: “las dificultades de los estudiantes con los aspectos formales de la teoría de los espacios vectoriales no se deben a un problema general con el formalismo sino más bien a una dificultad de comprender el específico uso del formalismo” (Dorier, 2002, pág. 877).

Figura 5. Dos ejemplos de imágenes para la visualización de identidades

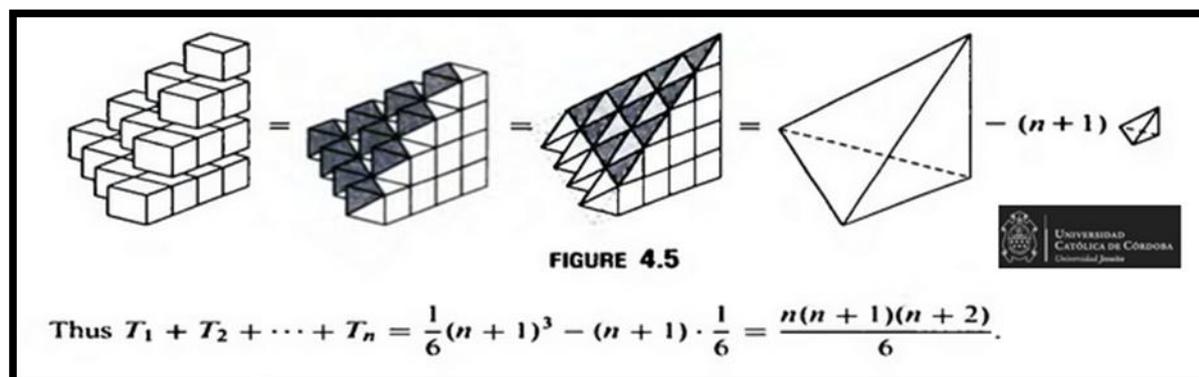


Fuente: (Nelsen, 1993, págs. 69-71)

La figura 5 ejemplifica estos procesos. Muestra la conversión del registro simbólico, donde se desarrollaría la prueba por inducción completa de la suma de los primeros n números naturales (la parte izquierda) o de los primeros $2n-1$ impares (panel

derecho), en una representación gráfica donde se puede ver una manera de construir la suma de esos números.

Figura 6. Un ejemplo de visualización de la suma de números triangulares



Fuente: (Alsina & Nelsen, 2005, pág. 21)

La figura 6, del estilo de la figura 5, presenta ya características muy diferentes. Basta un vistazo a la figura 5 para captar la idea esencial que está en el gráfico, mientras que la figura 6 es tal vez, en sí misma, más exigente que la prueba ofrecida al pie de la misma en el registro simbólico. La visualización, aquí resulta casi más exigente que la formalización correspondiente¹⁴.

La efectividad de los objetos de visualización para comunicar información depende, entre otras cosas, del color, el realismo, la relevancia y su conexión con los conocimientos previos (Martins & Acero, 2006, págs. 101-106; Reis, Faísca, Ingvar, & Peterson, 2006, pág. 206; Park & Hopkins, 1993, pág. 44). En la implementación de objetos de visualización es necesario tomar en cuenta que el exceso de detalles y la profusión de medios puede conspirar contra la comprensión profunda (Phillips, Norris, & Macnab, 2010, pág. 26; Carr, 2013, págs. 135-160; Martins & Acero, 2012a, págs. 1-34), lo que exige cierta austeridad al momento de compaginar los recursos de visualización, manteniéndolos tan simples como lo permita la complejidad del concepto abstracto a ser enseñado (Vekiri, 2002, pág. 263).

En cuanto a la disciplina escogida, se sabe que edificio abstracto del álgebra lineal se construye por acumulación, superposición y vinculación entre axiomas y resultados; se encuentra entre las disciplinas más distantes de lo palpable. La estructura está hilvanada en un discurso eminentemente lógico, del que resultan conceptos tales como espacio vectorial, espacio métrico, espacio hermítico, matriz, ortogonalidad, proyección, etc. En la mayoría de los casos las definiciones

estructurales requieren de una axiomática, de la que a su vez se desprenden las proposiciones que iluminan los aspectos esenciales emergentes de tal axiomática¹⁵.

La descomposición en valores singulares (DVS) permite escribir cualquier matriz como el producto de otras tres, dos ortogonales y una tercera diagonal generalizada. Este tema, por lo general, arriba hacia el final de un curso introductorio de álgebra lineal. Es también la ubicación que suele tener en los libros de texto universitario (Shores, 2013, págs. 291-303) (Allaire & Kaber, 2013, págs. 34-38), (Bapat, 2000, págs. 79-97), (Bosch, 2008, págs. 198-224), (Demmel, 2013, págs. 165-264), (Eldén, 2013, págs. 55-72), (Vasanth Kandasamy & Smarandache, 2013), (Meyer, 2013, págs. 411-428), (Yanai, Takeuchi, & Takane, 2011, págs. 125-149), (Lax, 1995, págs. 140-142), (Strang, 1988, págs. 331-339), (Sewel, 2005, págs. 135-137), (Lay, 2013, págs. 430-435), (Poole, 2013, págs. 599-619). La noción implica una condensación de conceptos abstractos previos que han de haber sido encapsuladas como un objeto sobre el cual aplicar procesos cognitivos de orden superior. Involucran temas centrales del álgebra lineal, y resultados esenciales acerca de autoespacios y espectros de las matrices simétricas semidefinidas positivas.

La presentación de la información en al menos dos registros se postula, entonces, una condición *necesaria* para la aparición del fenómeno de conversión. Tratándose de álgebra lineal, la axiomática procede en niveles de abstracción que se han alejado notoriamente de los posibles sustratos empíricos que pudieron alguna vez ser su motivación. En tal abstracción, usualmente comprimida en una definición, los conceptos resultarán pobremente comprendidos, fácilmente olvidados y difícilmente aplicables. La recomendación, desde esta perspectiva, alienta presentaciones en un contexto relevante y familiar que conceda a los alumnos la posibilidad de establecer conexiones en esa diversidad de ambientes. Así resulta que cada representación revela un aspecto del objeto, dejando ocultos los restantes; esta limitación, sin embargo, no exige renunciar a idear representaciones que apunten a las propiedades características de los objetos; el concepto matemático es adquirido mediante un proceso continuo, cada comprensión es transitoria, y será superada en sucesivas representaciones. La construcción, por otra parte, implica tareas que exigen la utilización de diversas representaciones. Las investigaciones de experiencias en clase de este sistema, en el ámbito de la matemática elemental, “son prometedoras, pero revelan grandes inconvenientes de implementación” (Mitchelmore & White, 2007, pág. 4). Las propuestas didácticas en el área del

álgebra lineal con frecuencia que se orientan a una implementación de prácticas de enseñanza que pretendan explotar la visualización debe procurar un aprendizaje que transcurra por diversas representaciones, articuladas progresivamente en un proceso que partiendo de una representación identificable, prosiga en el tratamiento de la representación para finalmente llegar a la conversión en otra representación en un mayor nivel de abstracción, secuencia postulada en detalle por los teóricos de los registros de representación semiótica.

3. Aspectos metodológicos

Consecuente con el marco conceptual, puede decirse que los materiales *visibles* son, principalmente, fotografías digitales, mientras que por materiales solo reconocibles por su organización abstracta se cuentan los resultados propios del campo del álgebra lineal que se pretende enseñar (matrices de proyección, errores cuadráticos mínimos, matrices simétricas semidefinidas positivas, descomposición en valores singulares) y una tecnología de software para efectuar *tratamientos* y *conversiones* (aquí se utiliza la aplicación matlab[®]), que son luego visualizadas y organizadas en una secuencia didáctica a la que el estudiante accede a través de la plataforma educativa virtual (aquí Moodle) dispuesta por la Facultad de Ingeniería de la Universidad de Buenos Aires. Los métodos son los propios de la disciplina en estudio, que trabajan los resultados en el registro simbólico, para luego presentar en simultáneo las correspondencias con un registro gráfico visible. En la figura 7 se observan algunas de las fotografías utilizadas para el tratamiento.

Figura 7. Dos imágenes digitales utilizadas como materiales visibles



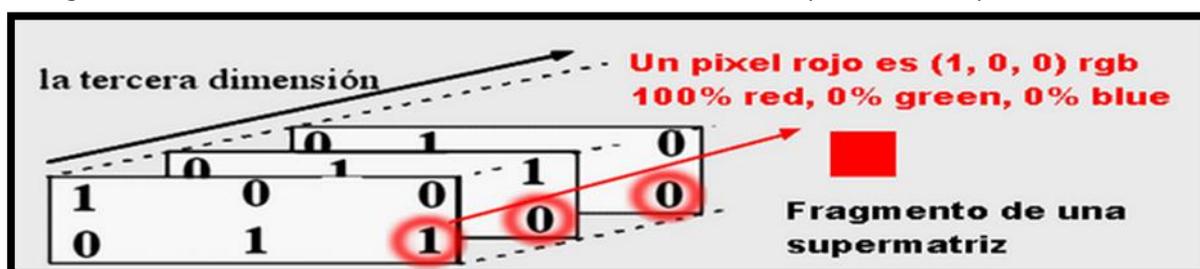
Fuente: elaboración propia

El propósito es mostrar una implementación didáctica en donde las abstracciones que son propias de un sistema axiomático formal como el del álgebra lineal admiten presentaciones en registros no exclusivamente formales. La conexión básica por las que transcurren las conversiones se establece entre el registro matricial (simbólico) y el registro gráfico (visible). Para el establecimiento de esta conexión se selecciona un contexto relevante para el estudiante, un sustrato que le sea cotidiano: las imágenes digitales. Las imágenes digitales hoy forman parte del mundo ‘natural’ del alumno –y el de sus profesores–, lo que asegura un anclaje directo a la experiencia corriente. La conexión entre las imágenes concretas y la DVS se establece en varios niveles de abstracción. El primero y más elemental, introduce una correspondencia entre los objetos sobre los que actúa la DVS –las matrices– y las imágenes mismas; a partir de allí, en el interior de cada registro se operan tratamientos específicos que son constantemente relacionados en la presentación.

4. Resultados y discusión

El filtro aplicado para la selección del tema a *convertir* en un registro gráfico significativo y relevante –según la denominación del marco teórico de la fundamentación– se apoya en el criterio de trabajar con una abstracción cuya distancia a cualquier sustrato empírico que pudiera conjeturarse fuese tan grande como para impedir toda reconstrucción espontánea. La primera asociación entre los registros que interesa establecer es entre una imagen y una matriz. Una imagen digital en color se corresponde con una *supermatriz*, según el lenguaje corriente en la denominada *súper álgebra lineal* (Vasantha Kandasamy & Smarandache, 2013). La supermatriz también puede considerarse como una especie de matriz clásica tridimensional, lo que es más apropiado para este trabajo.

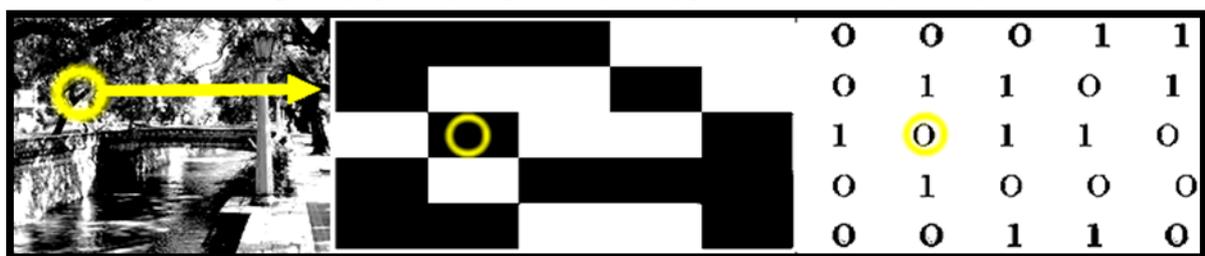
Figura 8. Una matriz tridimensional como tres estratos de una matriz plana de 2 filas por tres columnas



Fuente: elaboración propia

La figura 8 muestra un apilamiento de tres matrices bidimensionales que constituye una matriz tridimensional. Una imagen digital se compone de pequeños cuadraditos que contienen información. Si se concibe cada *pixel* (*picture element*) como la más pequeña unidad de información de una imagen digital, puede pensarse que un vector de tres componentes numéricas asigna un color a un dado *pixel*, localizado por su fila y columna, un color. En la figura 8, en el sistema denominado RGB (Rojo-Verde-Azul) por sus siglas en inglés, se observa que el *pixel* del ángulo inferior derecho tiene asignado un vector $v = (1, 0, 0)$, por lo que se verá de color rojo puro. Las imágenes en blanco y negro y las imágenes en tonos de grises, en cambio, son representadas por matrices planas, pues basta asignarle a cada *pixel* un solo número que indica su tono. La cantidad de números que pueda asignarse a cada casillero contribuye a la resolución de la imagen y depende del número de bits que se esté utilizando. Si se toma $b = 1$, a cada *pixel* solo se le puede asignar dos números ($2^b = 2^1 = 2$), pudiendo ser entonces solo un 0 o un 1, como lo muestra la figura 9, en la que se ve en el panel izquierdo la fotografía de la que se han ampliado 25 *pixels* en la parte central (donde se observa que son, o bien blancos, o bien negros), y en el panel de la derecha la matriz que asigna a cada *pixel* un número que solo puede ser 0 (negro) o 1 (blanco). La fotografía completa es, entonces, una matriz con tantas celdas como *pixels* ocupada por ceros o unos.

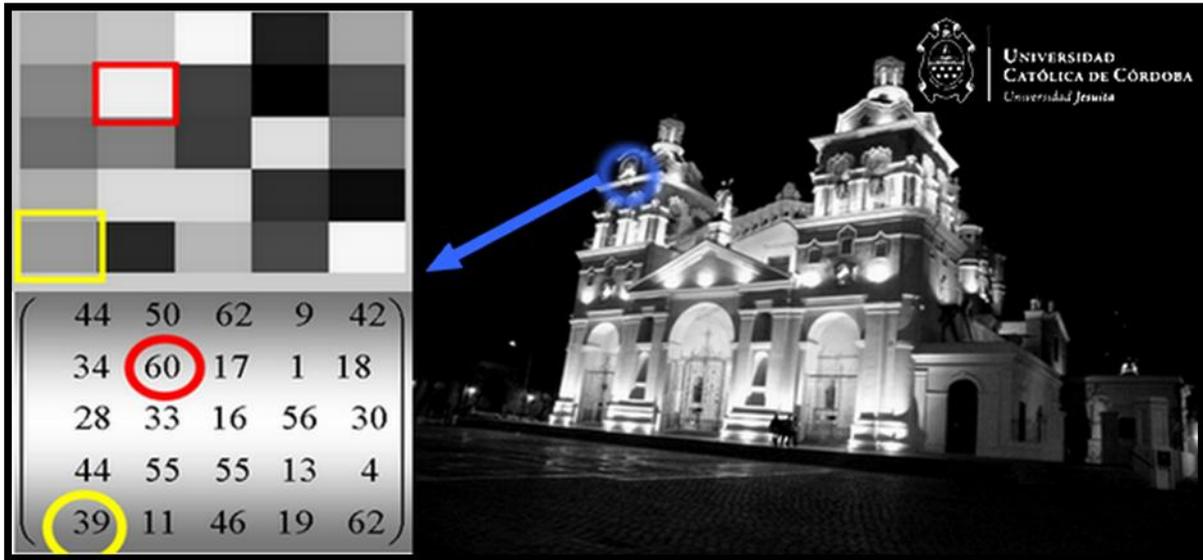
Figura 9. Fotografía (izquierda), ampliación (centro) y matriz asociada (derecha) con $b = 1$



Fuente: elaboración propia

Si se aumenta la resolución, tomando $b = 6$, por ejemplo, se dispondrá ahora de 64 ($2^b = 2^6 = 64$) números para asignar a cada *pixel*, y la imagen se verá entonces con más matices. La figura 10 muestra ahora la catedral con un detalle de 25 *pixels* localizados en una de la torres, donde se observa la vecindad de puntos muy luminosos (como el *pixel* etiquetado con el número 60) próximos a puntos con iluminación intermedia (como el que lleva la numeración 39) y puntos casi negros como el que lleva asignado el número 1.

Figura 10. Selección (torre) de 25 *pixels* y su correspondiente matriz



Fuente: elaboración propia

La asociación entre la imagen y la matriz queda así establecida. Un objeto matemático, como la matriz, escrito en el registro simbólico, es correlacionado con un objeto visible como la imagen. La instalación de esta correspondencia resulta eficaz solo en cuanto se cumplan los requisitos establecidos en el apartado del entorno conceptual, esto es una constante remisión del formato digital en este caso, al formato matricial, y manteniendo el problema tan simple como lo admita el tópico, lo que aquí se alcanza restringiéndose a imágenes en tonos de grises¹⁶.

La figura 11 muestra las matrices asociadas a seleccionadas regiones de las imágenes completas en un sistema de 6 bits. Se intenta con la figura introducir una idea que va más allá de la asociación entre objetos, como aproximación a la descomposición en valores singulares. Las zonas con colores uniformes, como las señaladas en el panel izquierdo, tienen correspondientes matrices bastante 'monótonas', esto es con escasas variaciones entre pixel y pixel, como se ve en la falda de Lady Di, y un poco más variado en la muñeca de Borges. En la matriz que toma un sector del muro, se observa un crecimiento notable de los valores en la penúltima fila, lo que se corresponde con la junta horizontal entre ladrillos.

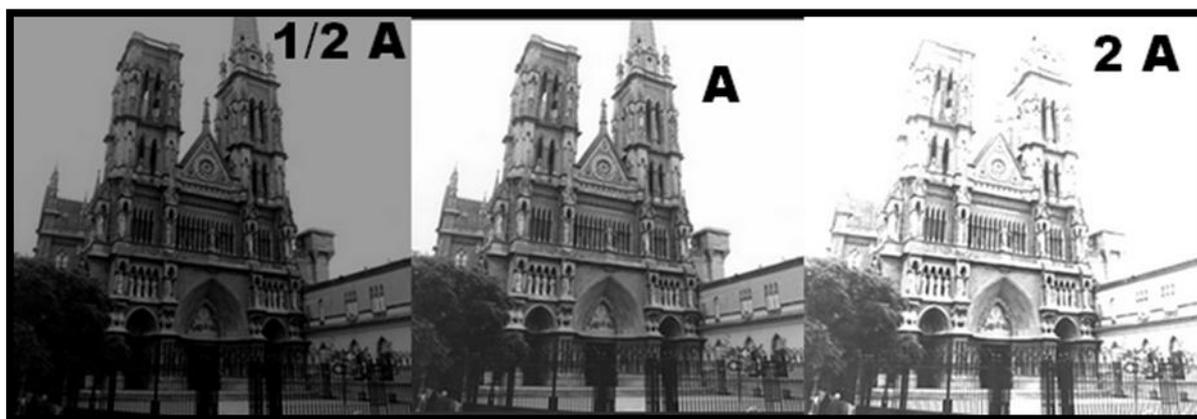
Figura 11. Uniformidad de las matrices en las regiones asociadas a escasas variaciones en la imagen



Fuente: elaboración propia

La tecnología necesaria para convertir las imágenes en matrices con la aplicación que se está trabajando es bastante sencilla, basta tener la imagen almacenada en una carpeta con un nombre que se pasa como argumento a una función específica (*imread*)¹⁷ que se encarga de leerla. Por ejemplo, la imagen llamada 'cañada.jpg', puede ser almacenada en una matriz que puede llamarse 'p', escribiendo la instrucción $p = \text{imread}('cañada', 'jpg')$; el resultado es almacenado en una matriz p cuyo tamaño coincide con el número de *pixels* de la imagen, cada uno de ellos cargado con un número entero entre 0 y 2^b . Con la posibilidad de manipular matrices, esto es efectuar *tratamientos* en el lenguaje de Duval, se abre la posibilidad inmediata de 'ver' las operaciones matriciales de modo directo, a través de los efectos sobre las imágenes correspondientes. Por ejemplo, la operación de sumarle una matriz constante C , una matriz A que representa la imagen a una imagen I_A , producirá una matriz $B = A + C$, cuya imagen asociada es I_B que no será otra cosa que la imagen original pero más clara¹⁸. La operación de multiplicar por un escalar positivo $\alpha < 1$ a esa matriz A , producirá una matriz $D = \alpha A$ cuya imagen I_D será la original con sus tonalidades más oscuras, pero manteniendo sus correspondientes gradientes, ya que la multiplicación por un escalar es una operación lineal: por ejemplo, con $\alpha = \frac{1}{2}$ un blanco puro en un sistema de $b = 8$ (255) se transformará en un gris puro. El producto por un número α mayor que 1 (tras el escalamiento), produce el efecto contrario, tal como lo muestra la figura 12, con la figura original en el centro y sus 'multiplicaciones' en los paneles laterales.

Figura 12. Los correlatos visuales del producto de un escalar por una matriz



Fuente: elaboración propia

Si las operaciones anteriores retienen la posición variando su color, otras operaciones matriciales cambian los *pixels* de lugar, como por ejemplo la trasposición matricial A^T , que intercambia filas por columnas, o la proyección ortogonal de una matriz sobre el espacio de las matrices simétricas (se sobrentiende que en el espacio euclídeo definido por producto interno canónico $(A, B) \stackrel{\text{def}}{=} \text{tr}(A^T A)$) dada por la matriz $\frac{1}{2} (A + A^T)$. En este caso la imagen no tendrá a misma posición relativa a la pantalla, aunque en el primer caso se preservan las distancias relativas de los puntos entre sí, como lo muestra el panel medio de la figura 13, que representa la trasposición matricial de la imagen correspondiente que se encuentra en el panel izquierdo. La imagen que se representa en el panel derecho, en cambio, es la obtenida como correspondiente a la semisuma de una matriz con su traspuesta, que de hecho es una matriz simétrica, aunque los escalamientos introducidos por la suma que no es directa, sino que se efectúa en el espacio de las clases de equivalencia módulo 2^b . Según las consideraciones del apartado conceptual, son estas transformaciones las que potenciarían la comprensión, siempre que se combinaran con la constante invocación a explicar las correspondencias, que en el caso de la figura 13 podrían comenzar con actividades como explicar porqué el zócalo de la imagen del panel derecho es tan claro.

Figura 13. Los correlatos visuales de la trasposición y semisuma de una matriz con su traspuesta



Fuente: elaboración propia

Conforme a lo expuesto en el apartado conceptual, esta sería una forma efectiva de que el alumno construya las asociaciones entre las operaciones sobre las matrices y sus imágenes, al percibir la interacción con realimentación instantánea de los resultados de sus acciones formales. Esto es particularmente importante para una operación que es bastante más compleja que las elementales: la descomposición en valores singulares. Además de la visualización, la exigencia de relevancia respecto del contexto del alumno y del contexto tecnológico, sugiere el planteo de un problema de fácil enunciación: dado que las imágenes demandan mucho espacio y este es crítico en los tiempos de transmisión de dato, se busca una razonable manera de economizar este espacio sin pérdidas esenciales en la imagen.

Este problema (denominado genéricamente de la compresión de imágenes digitales) halla en la matemática avanzada al menos dos respuestas: (1) a través de la transformada discreta de Fourier, (2) la descomposición en valores singulares (DVS). La idea de la descomposición en valores singulares –que no su formalización– es relativamente sencilla: si una matriz puede descomponerse como la suma de otras, de manera que los primeros sumandos definan lo esencial de la imagen asociada, podrá prescindirse de los siguientes. El resultado algebraico principal de la DVS es que para cualquier matriz A real de $m \times n$ pueden encontrarse tres matrices U , S , V tales que $A = U S V^T$, siendo U una matriz ortogonal de $m \times m$, S una matriz diagonal de $m \times n$ con elementos no negativos en la diagonal S_{ss} , V una matriz ortogonal de $n \times n$, donde si se llama $s_k \stackrel{\text{def}}{=} S_{kk}$ y se ordenan en forma decreciente los valores singulares s_k se tiene que $s_1 \geq s_2 \geq \dots \geq s_p \geq 0$, con $p = \text{mín}\{m, n\}$. Los valores s_k son los valores singulares de A , y la descomposición $A = U S V^T$ es una descomposición en valores singulares de A . Este trabajo precisamente muestra que en este resultado se halla el germen de una respuesta algebraica al problema de la compresión de

imágenes planteado. En efecto, si se llama $A(k)$ a la suma de las matrices $A_1 + A_2 + \dots + A_k$, donde $A_k = \sigma_k u_k v_k^T$ con u_k y v_k las columnas de las matrices U y V de la DVS dada por $A = USV^T$ y σ_k el correspondiente valor singular (ordenados en forma decreciente, como es usual) Resulta así que en $A(k)$ se retienen los primeros k sumandos, que dado el ordenamiento decreciente de los valores singulares, contienen lo esencial de la información con la que la matriz construye la imagen. De este modo, no es necesario llegar hasta el valor p anteriormente definido, ya que los últimos sumandos contribuirán cada vez menos a la imagen completa. Si ese valor se mantiene por debajo del poder de resolución humano, no habrá pérdida alguna en la calidad de la imagen. En realidad, se trata por lo general de una solución de compromiso entre la calidad pretendida y el espacio razonablemente disponible.

Figura 14. Descomposición en valores singulares truncada

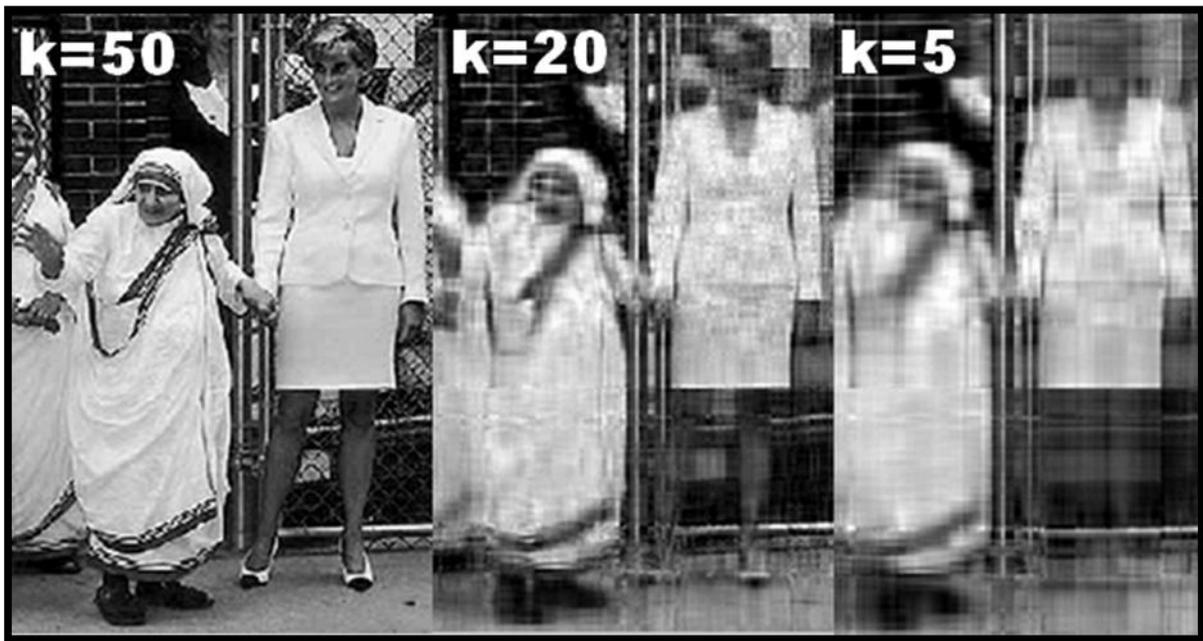


Fuente: elaboración propia

Puede observarse lo que sucede en la figura 14 en el panel de la izquierda cuando se toma la suma de solo las dos primeras matrices de la descomposición, que siendo muy poco, permite sin embargo adivinar una silueta que luego se va perfilando con mayor nitidez a medida que se aumenta la cantidad de información. También se observa que las diferencias van decreciendo en importancia: siendo notables en el pasaje de $k = 2$ a $k = 15$, para lograr una mejora similar es necesario ir desde allí hasta $k = 45$, que ya no tiene prácticamente diferencia alguna con la imagen original. La matriz A que construye la figura original es de dimensión 720×720 *pixels*, y para definirla es necesario asignarle un valor a cada uno de esos 518400 casilleros. Si se utilizan los primeros 2 sumandos de la descomposición, esto es la matriz que construye el panel izquierdo de la figura, apenas hará falta un 5% de la información original. La figura del panel derecho, con $k = 45$, solo requiere el 12% de la original. En el caso general, la relación de compresión de una imagen monocromática de $n \times m$ *pixels* que se comprime tomando solo k términos resulta de

contar que para almacenar $A(k)$ se necesitan $n \times k$ valores para las primeras k columnas de la matriz U , $m \times k$ para las primeras k filas de la matriz V^T y otros k valores para la matriz S , de modo que se tiene un total de $(n + m + 1) \times k$. Se deduce entonces que la relación de compresión β entre la información de la imagen comprimida y la original es $\beta = (n + m + 1) \times k / (n \times m)$. La figura 15 presenta la misma idea que la figura 14, con distintos valores de compresión.

Figura 15. Descomposición en valores singulares truncada



Fuente: elaboración propia

La integración de la noción de DVS con los conceptos previos de la misma asignatura se alcanza introduciendo ahora correspondencias ya no entre objetos, sino entre sus relaciones. La matriz denominada $A(k)$ puede ser también interpretada como la mejor imagen que se puede lograr si se restringe el espacio al que generan las matrices A_1, A_2, \dots, A_k , donde lo de 'mejor imagen' significa, en una métrica que no interesa en este trabajo especificar, la que se encuentra a una distancia mínima del original, donde una medida de esa distancia es error (mínimo) cometido al reemplazar la imagen original A por la imagen $A(k)$.

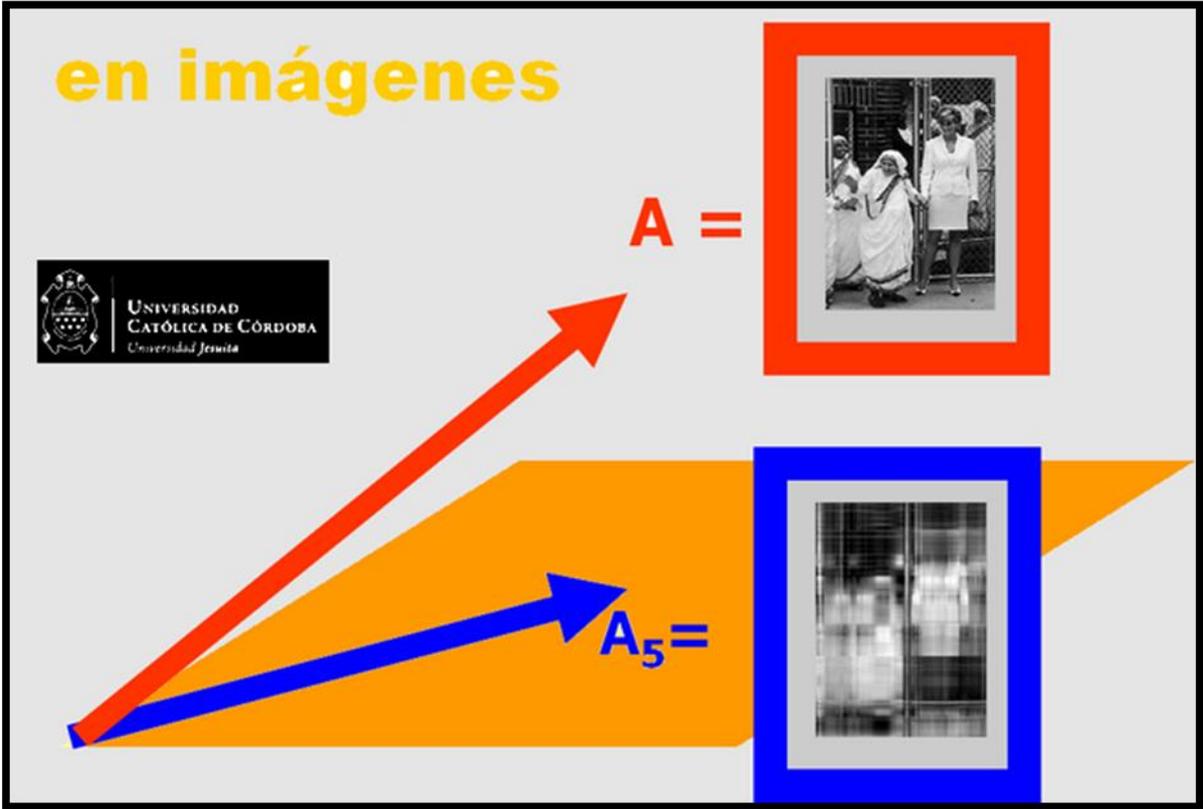
Figura 16. La matriz como mejor aproximación a la matriz original



Fuente: elaboración propia

La figura 16 ilustra el párrafo anterior (¡es una visualización!) que todavía no conecta con las visualizaciones que se están manipulando con la aplicación. Esa conexión es la que pretende la figura 17, procurando establecer las correspondencias entre los dos registros.

Figura 17. La imagen comprimida como mejor aproximación a la imagen original

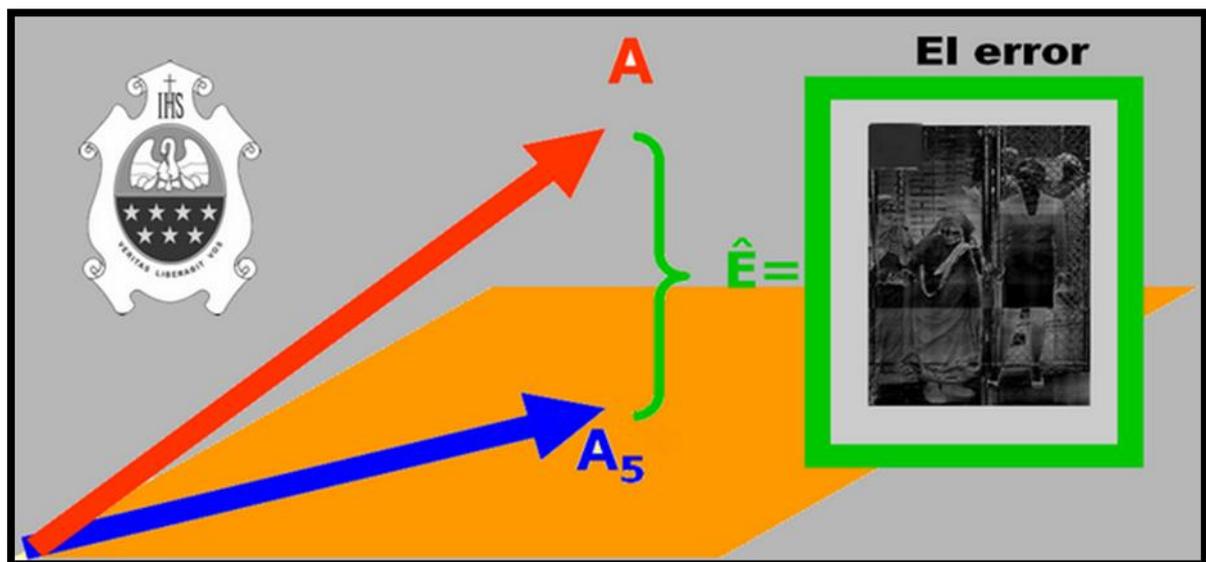


Fuente: elaboración propia

La imagen inferior de la figura 17 es aquella que, para a relación de compresión elegida de $k = 5$, está más próxima a la imagen original que se encuentra en un espacio con mayor información, que se ha pretendido contraer en la compresión. El

error que hay entre una y otra puede ser medido, en la norma del problema, pero también puede ser visualizado con un recurso muy sencillo que es la idea básica de las aplicaciones de reconocimiento de imágenes: si se resta una de otra, y se grafica la matriz de errores, deberá ser tanto más negra cuanto más próxima se encuentre la imagen comprimida a la imagen original. Las zonas más claras de esa matriz de errores advertirán de las regiones en donde localmente la compresión ha introducido las mayores desviaciones.

Figura 18. La imagen que sirve de estimación del error en la compresión



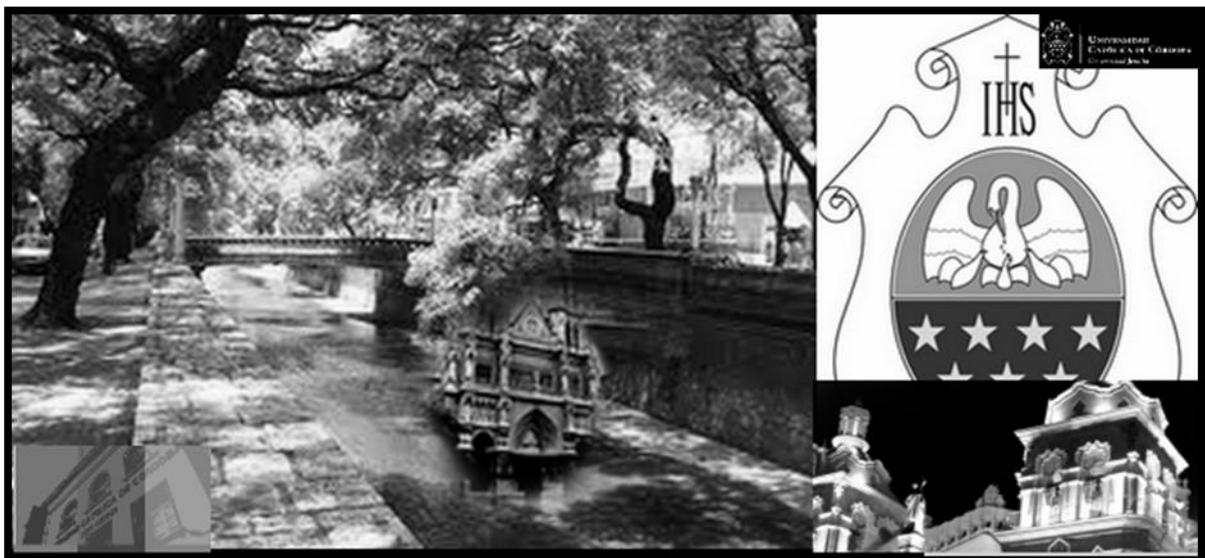
Fuente: elaboración propia

Las conversiones entre las imágenes y las matrices que las representan puestas en evidencia en este caso son solo unas pocas de las que contribuyen al aprendizaje. Las dimensiones cognitivas de relacionar objetos (esta matriz corresponde a esta imagen, la comprimida a aquella otra...) son extendidas a las del razonamiento (la suma de las primeras matrices es una buena aproximación a la imagen porque los valores singulares se han ordenado de modo decreciente), la estimación (cuán buena es una aproximación, de qué manera cuantificarlo). La visualización puede entonces resultar un medio eficiente frente al tiempo insumido en introducirlos. En este trabajo se alcanzó el objetivo de crear y poner operativa una herramienta que habilita la visualización en un tema (la descomposición en valores singulares) de abstracción condensada de otras previas. El recurso permite tocar más de una dimensión cognitiva y exige establecer relaciones entre conceptos abstractos (matrices) y objetos concretos (imágenes percibidas). También alienta la introducción de relaciones entre conceptos abstractos previos (proyecciones) y el

problema de la compresión. La elección de las imágenes y la elección del problema siempre pueden ajustarse para alcanzar cierto grado de relevancia para el estudiante. Permite además abrir nuevas líneas para el recorrido de los alumnos en la misma asignatura, o trascendiéndola. Por ejemplo, bastaría tomar estos resultados como punto de partida para proponer al alumno la investigación de otros formatos de compresión de imágenes (como jpeg *Joint Experts Photographic Group*) que no utilizan SVD sino técnicas que trasladan a las aproximaciones por transformadas de Fourier. El tema de SVD actúa como caso: si con uno de tal abstracción la visualización es posible de múltiples maneras, al menos eso resultará válido para conceptos de menor grado de abstracción.

Las posibilidades de efectuar todavía transformaciones con las correspondencias establecidas en este trabajo dejan abiertas actividades muy diversas que ya se sitúan en las zonas de demandas cognitivas elevadas, y que pueden quedar propuestas para los estudiantes que quieran ir más allá de la mera cuestión de visualización.

Figura 19. El problema inverso ¿qué operaciones matriciales pueden producir esta imagen?



Fuente: elaboración propia

El problema inverso planteado por la figura 19 es solo un ejemplo de las posibles actividades que exceden ya el propósito de la visualización. Ahora ya no se trata de cómo visualizar algo dado, sino de lograr algo en el registro simbólico que ajuste una percepción dada.

5. Bibliografía

Acero, F. (2011b). Demandas cognitivas del álgebra lineal en textos universitarios de la Argentina. XXII encuentro del estado de la investigación educativa. El hacer de la investigación educativa. Una reflexión de los diseños metodológicos (págs. 1-20). Córdoba: Universidad Católica de Córdoba.

Acero, F. (2011c). El sinuoso concepto de curva y los libros de texto. En Z. Cataldi, & F. Lage (Comps.), JEIN 2011: I Jornada de Enseñanza de la Ingeniería (págs. 222-232). Buenos Aires: Universidad Tecnológica Nacional.

Acero, F. (2012c). La Abstracción de la Matemática en la Ingeniería. XVII EMCI (Educación Matemática en Carreras de Ingeniería). Octubre 2012 (págs. 1-15). Buenos Aires: Universidad Tecnológica Nacional.

Agnew, R. (2013). Calculus. Analytic Geometry and Calculus, with Vectors (Segunda edición ed.). New York: McGraw-Hill.

Aline, R. (2005). La adquisición de la noción de convergencia de las series numéricas en la enseñanza superior. En S. Johsua, & J. J. Dupin, Introducción a la didáctica de las ciencias y la matemática (Primera edición ed., págs. 142-145). Buenos Aires: Colihue.

Allaire, G., & Kaber, S. (2013). Numerical Linear Algebra (Segunda edición ed.). (K. Trabelsi, Trad.) New York: Springer.

Alsina, C., & Nelsen, R. (2005). Math Made Visual. Creating Images for Understanding Mathematics (Primera edición ed.). Boston: The Mathematical Association of America .

Aman, H., & Escher, J. (2008). Analysis II (Primera ed.). (S. Levy, & M. Cargo, Trads.) Berlín: Birkhäuser.

Amann, H., & Escher, J. (2005). Anaysis I (Primera ed.). (G. Brookfield, Trad.) Berlín: Birkhäuser.

Anglin, W. (1994). Mathematics: A Concise History and Philosophy (Primera edición ed.). New York: Springer.

Anton, H. (2005). Elementary Linear Algebra (Novena ed.). New York: Wiley & Sons.

Anton, H., Bivens, I., & Davis, S. (2012). Calculus. Early Trascendentals. 10th Edition (Décima ed.). New York: Wiley and Sons.

Apostol, T. (2001). *Calculus. Volume II. Multi-Variable Calculus and Linear Algebra with Applications to Differential Equations and Probability* (Segunda edición ed., Vol. II). New York: John Wiley & Sons.

Apostol, T. (2001). *Calculus. Volumen I. Cálculo con funciones de una variable, con una introducción al álgebra lineal* (Segunda ed., Vol. I). Barcelona: Reverté.

Arcavi, A. (2003). The role of visual representations on the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 52(3), 215-242.

Ashton, A. (2013). *Harmonograph. A visual guide to the mathematics of music* (Segunda edición ed.). New York: Walker & Company.

Bapat, R. (2000). *Linear algebra and linear models* (Segunda edición ed.). New York: Springer.

Betti, R. (2013). *Elementi di Geometria e Algebra Lineare* (Tercera edición ed.). Bologna: Progetto Leonardo.

Blanchard, P. (Noviembre de 1994). Teaching Differential Equations with a Dynamical Systems Viewpoint. *The College Mathematics Journal*, 25(5), 385-393.

Borges, J. L. (1989a). *Obras Completas I. (1923-1949)* (Primera edición ed., Vol. I). Barcelona: Emecé.

Bosch, S. (2008). *Lineare Algebra* (Cuarta edición ed.). Berlin: Springer.

Bourbaki, N. (1977). *Éléments de mathématique. Théorie des ensembles* (Sexta ed.). Paris: Diffusion.

Boyer, C. B., & Merszbach, U. (1989). *A history of mathematics* (Segunda edición ed.). Republic of Singapore: John Wiley & Sons.

Bunge, M. (1996). *Intuición y Razón* (Primera edición revisada ed.). Buenos Aires: Sudamericana.

Bunge, M. (2001). *Intuition et raison*. París: Vigdor.

Butson, R. (2005). Learning objects: weapons of mass instruction. *British Journal of Educational Technology* Vol 34 No 5 2003 667–669, XXXIV(5), 667-669.

Canuto, C., & Tabacco, A. (2005). *Analisi matematica I. Teoria ed esercizi con complementi in rete. 2a edizione* (Segunda edición ed.). Milano: Springer.

Canuto, C., & Tabacco, A. (2008). *Analisi matematica II. Teoria ed esercizi con complementi in rete* (Primera edición ed.). Milano: Springer.

Carr, N. (2013). *The Shallows. What the Internet Is Doing to Our Brains* (Segunda edición ed.). New York: W. W. Norton & Company.

- Cerminara, M., & Markarian, R. (2000). Geometría y Álgebra Lineal I. Montevideo: Universidad de la República.
- Cicerón, M. T. (1972). Cuestiones académicas (Segunda edición ed.). (A. Millares Carlo, Trad.) Madrid: Espasa-Calpe.
- Courant, R., & John, F. (1999a). Introducción al Cálculo y al Análisis Matemático. Vol. 1 (Novena ed., Vol. I). (H. Pérez Castellanos, Trad.) México D. F.: Limusa.
- Creighton Buck, R., & Buck, E. (1978). Advanced Calculus (Cuarta edición ed.). New York: McGraw-Hill.
- Demmel, J. (2013). Applied Numerical Linear Algebra. Massachusetts: Siam.
- Dieudonné, J. (1997). Linear Algebra and Geometry (Tercera ed.). Paris: Hermann.
- Dorier, J.-L. (2002). Teaching Linear Algebra at University. ICM, III(1-3), 875-884.
- Dorier, J.-L. (2003). Sur l'enseignement des concepts élémentaires d'algèbre linéaire à l'université. ICMI, 3, 325-364.
- Dreyfus, T. (1991). Advanced mathematical thinking processes. En D. Tall, Advanced mathematical thinking (Primera edición ed., págs. 25-41). Dordrecht: Kluwer academic publishers.
- Dubinsky, E. (1992). A learning theory approach to calculus. En Z. Karian, & Z. Karian (Ed.), Symbolic computation in undergraduate mathematics education (págs. 43 – 55). Washington D.C.: Mathematical Association of America.
- Duval, R. (1998). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. Investigaciones en matemática educativa (Primera edición ed.). México, D. F.: Grupo editorial Iberoamérica.
- Duval, R. (1999). Representation, vision and visualization: cognitive functions in mathematical thinking. Basic issues for learning. En Proceedings of the Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (21st, Cuernavaca, Morelos, Mexico, October 23-26, 1999) (págs. 3-26). México.
- Eco, U. (2012). Arte y belleza en la estética medieval (Primera ed.). (H. Lozano Miralles, Trad.) Buenos Aires: Debolsillo.
- Eldén, L. (2013). Numerical Linear Algebra and Applications in Data Mining. Berlin: Springer.
- Elsgolts, L. (1977). Ecuaciones diferenciales y cálculo variacional (Segunda edición ed.). (C. Vega, Trad.) Moscú: Mir.

Fenstermacher, G., & Soltis, J. (1998). *Enfoques de la enseñanza* (Primera edición ed.). (A. Bixio, Trad.) Buenos Aires: Amorrortu.

Fraleigh, J., & Bearegard, R. (1990). *Linear Algebra* (Primera edición ed.). New York: Addison Wesley.

Giaquinto, M. (2007). *Visual thinking in mathematics. An epistemological study.* London: Oxford University Press.

Godement, R. (1998). *Analyse mathématique I. Convergence, fonctions élémentaires* (Primera ed.). Berlin: Springer.

Godement, R. (1999). *Analyse mathématique II. Calcul différentiel et intégral, séries de Fourier, fonctions holomorphes* (Primera ed.). Berlin: Springer.

Hadamard, J. (1949). *The Psychology of Invention in the Mathematical Field* (Tercera ed.). New York: Dover.

Hairer, E., & Wanner, G. (1996). *Analysis by its History* (Primera edición ed.). New York: Spinger-Verlag.

Halmos, P. (1987). *Finite-Dimensional Vector Spaces* (Quinta ed.). New York: Springer.

Hirst, K. (2006). *Calculus of One Variable. With 72 Figures* (Primera edición ed.). Londres: Springer.

Hoffman, K., & Kunze, R. (1990). *Linear Algebra* (Segunda edición ed.). New Jersey: Prentice Hall.

Jacob, P., & Jeannerod, M. (2003). *Ways of seeing: the scope and limits of visual cognition.* Oxford: Oxford University Press.

Jaeger, W. (2010). *Paidea: los ideales de la cultura griega* (Segunda edición, vigésimo primera reimpresión ed.). (J. Xirau, & W. Rocés, Trads.) México: Fondo de cultura económica.

Kant, I. (2004). *Crítica de la Razón Pura* (Primera edición ed.). Buenos Aires: Libertador.

Kenney, J. (2013b). *Mathematics as Language.* En J. Kenney, E. Hancewicz, L. Heuer, D. Metsisto, & C. Tuttle, *Literacy Strategies for Improving Mathematics Instruction* (Segunnda edición ed., págs. 1-8). New York: Association for Supervision and Curriculum Development.

Kostrikin, A., & Manin, Y. (1997). *Linear Algebra and Geometry* (Primera ed.). (M. Alferieff, Trad.) Amsterdam: Gordon and Breach Science.

Kudriáv'tsev, L. D. (1983). Curso de análisis matemático. Tomo I. (Primera edición ed., Vol. I). (V. Fernández, Trad.) Moscú: Mir.

Kudriáv'tsev, L. D. (1984). Curso de análisis matemático. Tomo II (Primera edición ed., Vol. II). (V. Fernández, Trad.) Moscú: Mir.

Landau, E. (1951). Differential and Integral Calculus (Segunda edición ed.). (M. Hausner, & M. Davis, Trads.) New York: Chelsea.

Lang, S. (1973). Calculus of Several Variables (Segunda edición ed.). Massachusetts: Addison-Wesley.

Lang, S. (1986). Álgebra Lineal (Primera edición en español. [Original 1986, Linear algebra, second edition] ed.). (M. Lara Aparicio, E. Lluís Riera, & J. Arias Páez, Trads.) México D. F.: Addison-Wesley Iberoamericana.

Lax, P. (1995). Linear Algebra (Primera edición ed.). New York: Springer Verlag.

Lay, D. (2013). Linear ALgebra and its applications (Quinta edición ed.). Massachusetts: Addison-Wesley.

Mancosu, P. (1996). Philosophy of Mathematics and Mathematical Practice in the Seventeenth Century (Primera ed.). New York: Oxford University Press.

Mancosu, P., Jörgensen, K., & Pedersen, S. (2005). Visualization, explication and reasoning styles in mathematics (Primera edición ed.). Dordrecht: Springer.

Marsden, J., & Tromba, A. (2003). Vector Calculus (Quinta edición ed.). New York: Freeman and Company.

Martins, M., & Acero, F. (2006). La segunda vía. En U. A. Empresa, Enseñar en la universidad (Primera edición ed., págs. 101-106). Buenos Aires: Temas.

Martins, M., & Acero, F. (2012a). Laboratorios digitales de autoevaluación. XXIII encuentro del estado de la investigación educativa (págs. 1-34). Córdoba: Universidad Católica de Córdoba.

McLuhhan, M. (1993). La galaxia Gutemberg. Génesis del "homo typographicus" (Tercera ed.). (J. Novella, Trad.) Barcelona: Cículo de Lectores.

Meyer, C. (2013). Matrix Analysis and Applied Linear Algebra (Segunda edición ed.). New York: Siam.

Mitchelmore, M., & White, P. (2007). Abstraction in Mathematics Learning. Mathematics Education Research Journal, 19(2), 1-9 .

Nadel, L. (Ed.). (2003). Encyclopedia of Cognitive Science. New York: Nature Publishing Group.

- Nakos, G., & Joyner, D. (2013). *Álgebra Lineal con Aplicaciones* (Sexta edición ed.). (V. González Pozo, Trad.) México D. F.: International Thomson.
- Needham, T. (2000). *Visual Complex Analysis* (Segunda edición ed.). Oxford: Oxford University Press.
- Nelsen, R. B. (1993). *Proofs without words. Exercises in visual thinking*. Washington: The Mathematical Association of America.
- Paivio, A. (1971). *Imagery and verbal processing* (Primera ed.). New York: Holt, Rinehart and Winston.
- Paivio, A. (1986). *Mental representations: a dual-coding approach* (Primera ed.). Oxford: OUP.
- Park, O. C., & Hopkins, R. (1993). Instructional conditions for using dynamic visual displays: a review. *Instructional Science*, 21(6), 427-449.
- Phillips, L. M., Norris, S. P., & Macnab, J. S. (2010). Models and modeling in science education. *Visualization in mathematics, reading and science education*. New York: Springer.
- Pluinage, F. (1998). Los objetos matemáticos en la adquisición de los conocimientos. *Investigaciones en Matemática Educativa*. México D. F. : Iberoamérica.
- Pogorélov, A. V. (1977). *Geometría diferencial* (Primera edición ed.). (C. Vega, Trad.) Moscú: Mir.
- Poole, D. (2013). *Linear Algebra: A Modern Introduction* (Tercera edición ed.). Toronto: Thomson.
- Presmeg, N. (2006). Research on visualization in learning and teaching mathematics. En J. Gutiérrez, & P. Boero, *Handbook on research on the psychology of mathematics education: past, present and future* (págs. 205-235). Rotterdam: Sense Publishers.
- Pylyshyn, Z. W. (2003). *Seeing and visualizing: it's not what you think*. Cambridge, MA: MIT Press.
- Quinet, J. (1976c). *Cours élémentaire de mathématiques supérieures*. Tome 3. *Calcul intégral et séries* (Sexta ed.). Paris: Dunod.
- Reis, A., Faísca, L., Ingvar, M., & Peterson, K. (2006). Color makes a difference: two-dimensional object naming in literate and subjects. *Brain and Cognition*(60), 49-54.

Rey Pastor, J., Pi Calleja, P., & Trejo, C. (1968). Análisis Matemático II. Cálculo infinitesimal de varias variables. Aplicaciones (Séptima edición ed., Vol. II). Buenos Aires: Kapelusz.

Rey Pastor, J., Pi Calleja, P., & Trejo, C. (1969). Análisis Matemático I. Análisis algebraico. Teoría de ecuaciones. Cálculo infinitesimal de una variable. (Octava edición ed., Vol. I). Buenos Aires: Kapelusz.

Ríbnikov, K. (1991). Historia de las matemáticas (Primera edición. Primera reimpresión ed.). (C. Valdés Castro, Trad.) Moscú: Mir.

Roxin, E., & Spinadel, V. (1976). Ecuaciones diferenciales ordinarias (Segunda edición corregida y ampliada ed.). Buenos Aires: Eudeba.

Santaló, L. (1993). Vectores y tensores con sus aplicaciones (Décimocuarta edición ed.). Buenos Aires: Eudeba.

Sewel, G. (2005). Computational methods of linear algebra (Segunda edición ed.). Hoboken, NJ: John Wiley & Sons.

Shores, T. (2013). Applied Linear Algebra and Matrix Analysis (Segunda edición ed.). Berkeley: New York.

Smith, L. (1984). Linear ALgebra (Primera ed.). New York: Springer.

Smith, R., & Minton, R. (2001). Cálculo. Tomo II (Primera edición ed., Vol. II). (H. Castillo, & G. Villamizar, Trads.) Bogotá: McGraw-Hill.

Spivak, M. (1979). A comprehensive introduction to differential geometry. Volume two (Segunda edición ed., Vol. 2). Houston, Texas: Publish or Perish.

Spivak, M. (1994). Calculus (Tercera ed.). Houston: Perish.

Strang, G. (1988). Linear algebra and its applications. Third edition (Tercera edición ed.). Massachusetts: Thomson Learning.

Strang, G. (2007). Álgebra lineal y sus aplicaciones. Cuarta edición (Cuarta edición en español ed.). (H. Villagómez, Trad.) México D. F.: Thomson.

Takeuchi, Y. (1990). Sucesiones y series (Primera edición. Tercera reimpresión ed.). México D. F.: Limusa.

Tall, D. (1991a). Advanced mathematical thinking (Primera edición ed.). Dordrecht: kluwer Academic Publishers.

Tall, D. (1995). The Psychology of Advanced Mathematical Thinking: Biological Brain and Mathematical Mind. Recuperado el 12 de julio de 2009, de Mathematics Education Research Centre University of Warwick: <http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot1994e-biolbrain-thmind.pdf>

- Tall, D. (2011). A Sensible approach to the Calculus. Recuperado el 10 de 12 de 2011, de <http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/>
- Tall, D., & Mejía Ramos, J. P. (2009). The Long-Term Cognitive Development of Different Types of Reasoning and Proof. Recuperado el 15 de julio de 2009, de University of Warwick. Publicado en Hanna, G., Jahnke, H. N., & Pulte, H. (Eds.), Explanation and proof in mathematics: Philosophical and educational perspectives. New York: Springer: <http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/downloads.html>
- Vasantha Kandasamy, W., & Smarandache, F. (2013). Super Linear Algebra. New York: Springer.
- Vekiri, I. (Septiembre de 2002). What Is the Value of Graphical Displays in Learning? Educational Psychology Review, 14(3), 261-311.
- Voevodin, V. V. (1986). Álgebra lineal (Primera edición. Primera reimpresión ed.). (K. P. Medkov, Trad.) Moscú: Mir.
- Wiley, D. A. (2001). Connecting learning objects to instructional design theory: a definition, a metaphor and a taxonomy. Recuperado el 8 de Julio de 2009, de The instructional use of learning objects, Association for Educational Communications and Technology: <http://www.elearning-reviews.org/topics/technology/learning-objects/2001-wiley-learning-objects-instructional-design-theory/>
- Willingham, D. (2007). Cognition: the thinking animal. Upper Saddle River, NJ: Pearson Education.
- Yanai, H., Takeuchi, K., & Takane, Y. (2011). Projection Matrices, Generalized Inverse Matrices, and Singular Value Decomposition (Primera edición ed.). New York: Springer.
- Yates, F. (2011). El arte de la memoria (Segunda edición ed.). (I. Gómez de Liaño, Trad.) Madrid: Siruela.
- Zill, D. (2007). Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado (Segunda Edición en Castellano [Original 1968: A First Course in differential equations with applications]. ed.). (E. Ojeda Peña, & Á. Cofré Mata, Trads.) México: Thomson.
- Zill, D. (2012). Cálculo con Geometría Analítica. Madrid: McGraw-Hill.
- Zorich, V. (2004a). Mathematical Analysis I (Primera ed.). (R. Cooke, Trad.) Berlín: Springer.
- Zorich, V. (2004b). Mathematical Analysis II (Primera ed.). (R. Cooke, Trad.) Berlín: Springer.

6. Notas

¹ La visualización, según esa concepción dominante, “no podría ser un recurso para el descubrimiento, justificación, prueba, ni ninguna otra de las maneras añadir valor epistémico a nuestro capital matemático” (Giaquinto, 2007, pág. 1).

² La frase adquiere su fuerza en el párrafo completo, en el que el autor precisa que eso que se entiende por matemática no ha variado en lo esencial desde los tiempos de Euclides; más aún, considera que el método axiomático es la herramienta por excelencia para procurarse nuevos conocimientos matemáticos: “Depuis les Grecs, qui dit mathématique dit démonstration; certains doutent même qu’il se trouve, en dehors des mathématiques, des démonstrations au sens précis et rigoureux que ce mot a reçu des Grecs et qu’on entend lui donner ici. On a le droit de dire que ce sens n’a pas varié, car ce qui était une démonstration pour Euclide en est toujours une à nos yeux [...] La méthode axiomatique n’est à proprement parler pas autre chose que cet art de rédiger des textes dont la formalisation est facile à concevoir. Ce n’est pas là une invention nouvelle; mais son emploi systématique comme instrument de découverte est l’un des traits originaux de la mathématique contemporaine » (Bourbaki, 1977, págs. E17-8).

³ La cita del párrafo completo, que pertenece al capítulo de las conclusiones del texto de Bunge, ayuda a encuadrar el pensamiento del autor en la posición que Giaquinto entiende como todavía prevaleciente: “L’intuition est féconde dans la mesure où elle est affinée et développée par la raison. Les produits de l’intuition sont grossiers au point d’être souvent inutilisables; il faut les élucider, les préciser, les compléter. L’“éclair” intuitif, le pressentiment peuvent être intéressants s’ils proviennent de la tête d’un expert, si on les expurge ou si on les intègre dans une théorie, ou tout au moins dans un corpus de croyances fondées. C’est de cette manière que nos intuitions acquièrent clarté et envergure; devenues des concepts et des propositions, elles peuvent être soumises à l’analyse, on peut les développer et les rattacher logiquement à d’autres constructions conceptuelles. Les intuitions fécondes sont celles qui s’intègrent à un corpus de connaissances rationnelles et, de cette manière, cessent d’être des intuitions” (Bunge, 2001, pág. 193).

⁴ El párrafo glosado proviene del siguiente: “Nous appréhendons intuitivement les discontinuités d’une fonction et de sa dérivée première, car les discontinuités de la fonction ont un correspondant visuel dans les discontinuités du graphe qui la représente, et celles de la dérivée première ont, comme correspondant visuel, les déviations brusques de la tangente. Mais il est presque impossible de “percevoir” les discontinuités des dérivées secondes, associées à des changements brusques dans le rayon de courbure, et pour les dérivées d’ordre plus élevé, il est tout simplement impossible de conclure quoi que ce soit au sujet de leur continuité à l’aide de la vue seule” (Bunge, 2001, pág. 73).

⁵ La Grecia clásica –y la helenística– concebía las curvas de dos maneras, una estática (intersección de una superficie con un plano) y una cinemática (el recorrido de un punto). Ambos casos remite a un conjunto de puntos obtenido por una operación mental que no se liga a ningún –entonces inexistente– sistema de coordenadas con el que Descartes y Fermat en el siglo XVII originaran la geometría analítica que se generalizó al espacio de modo sistemático con Clairaut y Euler en el XVIII introduciendo la geometría diferencial que se desarrollaría intensamente con el progreso del rigor introducido en el Cálculo a partir del siglo XIX. (Anglin, 1994, pág. 97; Boyer & Merszbach, 1989, págs. 175-176; Ríbnikov, 1991, págs. 286,294). En este intenso proceso de abstracción se advirtió que las ideas intuitivas de *curva* debían precisarse al extremo para protegerse de sorpresas del tipo de las introducidas por la curva de Peano y la curva de Hilbert hacia fines del XIX (Hairer & Wanner, 1996, págs. 291-292). Las cuestiones elementales de suavidad de curvas se tratan los textos usuales de cálculo o geometría diferencial. (Agnew, 2013; Amann & Escher, 2005; Apostol, 2001; Anglin, 1994; Canuto & Tabacco, 2008) (Courant & John, 1999a; Godement, 1999; Kudriávtssev, 1984; Zorich, 2004b; Zill, 2012; Pogorélov, 1977) (Spivak, 1994; Lang, 1973; Marsden & Tromba, 2003; Quinet, 1976c; Spivak, 1979) (Spivak, 1979; Smith & Minton, 2001; Rey Pastor, Pi Calleja, & Trejo, 1968).

⁶ Un *applet* es un objeto que permite el aprendizaje de segmentos de conocimiento que pueden ser utilizados por una variedad de usuarios en una diversidad de contextos de aprendizaje, y que el profesor integra y recombina los segmentos de acuerdo a sus propósitos de enseñanza. Algunas definiciones técnicas se dan en la siguiente lista: “cualquier recurso que pueda ser reutilizado como ayuda del aprendizaje” (Wiley, 2001, pág. 5), “herramientas interactivas en web que permiten el aprendizaje de conceptos específicos para ampliar, potenciar y guiar los procesos cognitivos de los aprendices” (Kay y Knaack 2007, 6); “material al que puede accederse desde la red, diseñado para ilustrar, complementar o asistir el aprendizaje de diversos usuarios en variadas localizaciones” (Cramer, 2007, 127); “un segmento de información digitalizado, reutilizable y accesible desde la red” (Walsh, 2006). Una presentación bastante completa de sus características cuando se aplican al

campo específico de la matemática pueden verse en un trabajo previo de los mismos autores (Martins & Acero, 2012a).

$$f(t) = \begin{cases} t^3 + 2t^2 + kt, & \text{si } t \leq 0 \\ e^{-t} \sin(\pi t) - kt, & \text{si } t > 0 \end{cases}$$

⁷ La función f está definida como $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que inmediato la continuidad de f en $t_0 = 0$, dado que $f(t_0) = 0$ coincide con $f(t_0^+)$ y $f(t_0^-)$. Sin embargo, la función es derivable en t_0 para un único valor de k , esto es $k_0 = \frac{1}{2} \pi$, que es un número irracional, y por lo tanto, ninguna manipulación del applet puede devolver tal valor. En la definición de la función en el código del *script* que controla los parámetros del applet, la definición de la función se escribe como `param name="Function" value="(t<0)?t^3+2*t^2+k*t:exp(-t)*sin(pi*t)-k*t"`. En el mismo *script*, se introduce con el carácter de escape el comentario del reconocimiento de los créditos: `<!! este documento fue preparado por Fernando Acero para el XXIV congreso del estado de la educación en la ciudad de Córdoba, Universidad Católica de Córdoba, para presentación de ejemplos de visualización en matemática, en este caso aplicada a la integral definida. Los applets interactivos se han elaborado con el material configurable del proyecto JVM. Agradezco al profesor David Eck, (su sitio: http://math.hws.edu/eck) por disponer en la red el código de sus applets permitiendo su modificación libremente.>`

⁸ El *kaleidophone* no se comporta como una cuerda vibrante ya que su rigidez le permite tomar esfuerzos de flexión y tiene solo un extremo fijo. No obstante ser un ‘instrumento’ de percusión, se comporta más bien como los instrumentos de viento, que tienen uno de sus extremos libres, lo que convierte la matemática asociada en más compleja. “Otras versiones del *kaleidophone* utilizan varillas de secciones cuadradas u ovals, produciendo configuraciones más variadas” (Ashton, 2013, pág. 45). La variación se comprende pues en las ecuaciones diferenciales de la varilla que actúa como un péndulo invertido, la rigidez es un parámetro que interviene en la configuración de las soluciones.

⁹ La desconfianza hacia las imágenes no es, desde luego, una exclusividad de la matemática, se aprecia en otros órdenes como –se sabe– el religioso. Solo que los motivos de la desconfianza son diversos: en la matemática la desconfianza provino de su capacidad de inducir desvíos del razonamiento, mientras que en la religión, de su capacidad de provocar desvíos de la piedad. Umberto Eco recuerda la bien conocida polémica de cistercienses y cartujos, especialmente virulenta hacia el siglo XII, y traduce algunos párrafos del cisterciense que son suficientes retrato de esa desconfianza: “se quedan pasmados por el arte, pero salen sin admirar su santidad [...] que a los monjes más les agrada leer en los mármoles que en los códices, y pasarse todo el día admirando tanto detalle sin meditar en la ley de Dios” (Eco, 2012, págs. 24-25).

¹⁰ El término visualización, en el texto de los autores, comprende tanto las imágenes mentales como las imágenes físicas obtenidas ya con un lápiz o con una computadora: “I will take a rather broad conception of visualization to include both visualization by means of mental images as well as visualizations by means of computer generated images or images drawn on paper, e.g. diagrams etc.” (Mancosu, Jørgensen, & Pedersen, 2005, pág. 13).

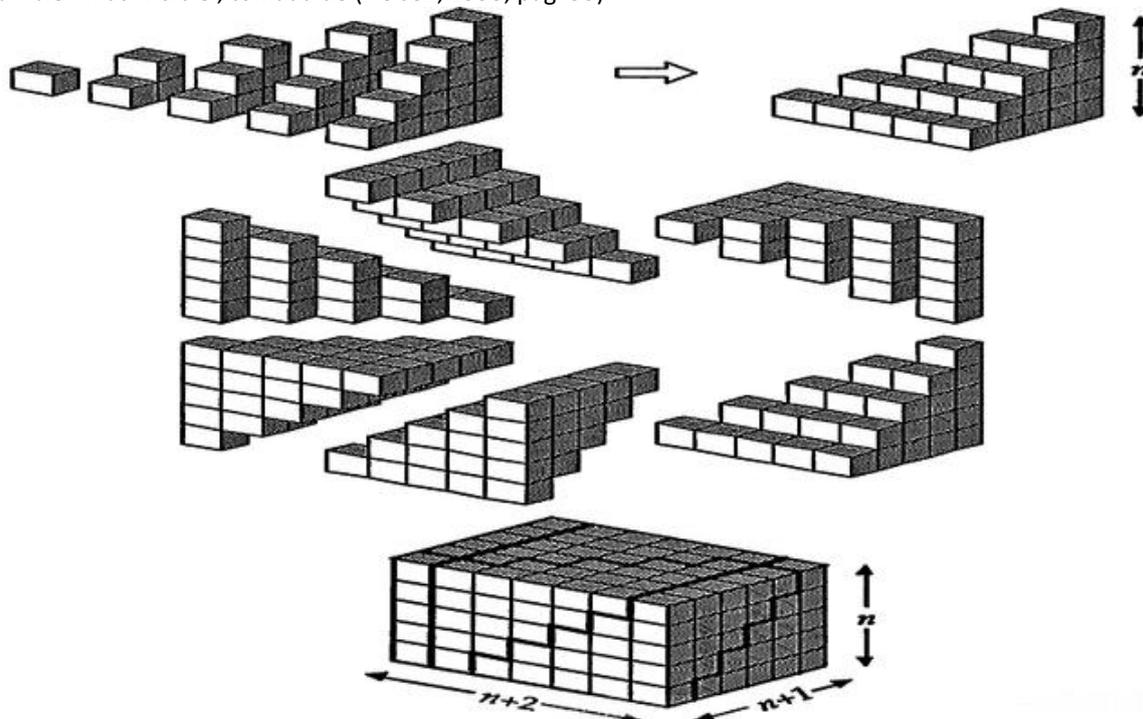
¹¹ La teoría de la codificación recuerda un mecanismo cuya invención en la Antigüedad fue referida a Simónides de Ceos (circa 556-468) y es relatada Cicerón en su *De Oratore*. La cuestión fundamental era asociar ideas a imágenes, presuponiendo que recorrer las ideas sería sencillo si se figuraba recorrer sus imágenes asociadas. El texto de Cicerón, tras recordar el sabido relato del banquete, es citado por la especialista de la Universidad de Londres, Frances Yates (Yates, 2011, págs. 17-18): “[Simónides] Infirió que las personas que deseasen adiestrar esta facultad habrían de seleccionar lugares y formar imágenes mentales de las cosas que deseasen recordar, y almacenar esas imágenes en los lugares de modo que el orden de los lugares preservara el orden de las cosas, y las imágenes de las cosas denotaran las cosas mismas, y utilizaríamos los lugares y las imágenes respectivamente como una tablilla de escribir de cera y las letras escritas en ella”. El arte de la memoria funciona con las imágenes como señales de elementos del lenguaje verbal. Las imágenes están a veces en lugar de palabras, pero muchas veces en lugar de argumentos completos. El mismo Cicerón cuenta el caso de Temístocles, a quien “habiéndole propuesto un día cierto individuo enseñarle un procedimiento recientemente descubierto para recordar, respondió: ‘preferiría aprender a olvidar’; sin duda contestó así porque todo lo que oía o veía se le quedaba grabado en el espíritu” (Cicerón, 1972, pág. 44). Simónides es parte de los nombres que lista Funes el memorioso (Ciro, Mitridates Eupator, Metrodoro...), el compadrito de Fray Bentos cuyos recuerdos “no eran simples; cada imagen visual estaba ligada a sensaciones musculares, térmicas, etc.” (Borges, 1989a, pág. 486).

¹² La incidencia de la teoría de la codificación dual ha impulsado el estudio de la presentación de información simultánea en más de un formato: “Paivio’s theory has led many researchers to explore the benefits and drawbacks of providing verbal and visual cues simultaneously, in order to encourage learners to use all sensory

modalities while interpreting and evaluating visualizations” (Phillips, Norris, & Macnab, 2010, pág. 34). Existe, sin embargo, una advertencia respecto a las conclusiones de esta teoría, sobre todo cuando se trata de presentar conceptos nuevos o muy avanzados (Vekiri, 2002, pág. 263).

¹³ Una discusión completa de estas perspectivas y sus resultados se encuentra en (Phillips, Norris, & Macnab, 2010, págs. 38-42)

¹⁴ De hecho, la construcción misma de ese esquema de visualización requiere especial ingenio por le modo de disponer los cubitos que representan números. La figura siguiente muestra otra no menos ingeniosa, pero también más ‘visible’, tomada de (Nelsen, 1993, pág. 95).



¹⁵ Por ejemplo, el Espacio vectorial es una estructura que comprende un total de 21 axiomas y que se compone de un conjunto con sendas leyes de composición interna y externa estructurado sobre un cuerpo de escalares con sus propias leyes de composición interna, el cuerpo como conjunto de escalares conformando grupo conmutativo con su primera ley y con la segunda, con exclusión del neutro de la primera para el axioma de elemento inverso, y la doble distributividad de la segunda ley respecto de la primera. El Espacio vectorial como grupo conmutativo con su ley interna e interactuando con su segunda ley y las del cuerpo mediante 5 axiomas de compatibilidad.

¹⁶ El tratamiento aquí presentado se extiende sin dificultad a las imágenes en color, ya que cualquier matriz tridimensional puede ‘aplanarse’ en una matriz bidimensional con el triple de casilleros y tras efectuarles los tratamientos adecuados, ensamblarlas nuevamente para así reconstruir la matriz tridimensional, y con ella, la imagen color.

¹⁷ La especificación completa del comando se obtiene en matlab tecleando la instrucción help imread, tras lo cual aparece la información, cuya primera parte es la siguiente. IMREAD Read image from graphics file. A = IMREAD (FILENAME,FMT) reads the image in FILENAME into A. If the file contains a grayscale intensity image, A is a two-dimensional array. If the file contains a true color (RGB) image, A is a three-dimensional (M-by-N-by-3) array. FILENAME is a string that specifies the name of the graphics file, and FMT is a string that specifies the format of the file. The file must be in the current directory or in a directory on the MATLAB path. If IMREAD cannot find a file named FILENAME, it looks for a file named FILENAME.FMT.

¹⁸ No se muestra aquí el detalle de cómo escalar los valores de C para no saturar los valores permitidos según el número de bits con los que se esté trabajando.