OBJETOS DIGITALES EN LA ENSEÑANZA DEL ÁLGEBRA Y LA GEOMETRÍA ANALÍTICA

Autor/es: MARTINS, Marcela

Dirección electrónica de referencia: mumartins@yahoo.com

Procedencia Institucional: Universidad Tecnológica Nacional, Facultad Regional Buenos Aires

Eje temático: Las tecnologías de la información y la comunicación

Palabras clave: visualización, objetos digitales, interactividad

Resumen

El conocimiento está mediado por herramientas materiales o simbólicas. El aprendizaje requiere de representaciones que constituyen herramientas mediadoras para la comprensión. La enseñanza puede ayudar a crear conexiones con los conocimientos previos a través de la visualización y de la contextualización, mediante ejemplos de la vida real, de modo de suscitar una respuesta emocional por parte del alumno. En este trabajo se describe una experiencia didáctica destinada a facilitar la interconversión entre los registros analítico y gráfico para el estudio de un tema de álgebra y geometría analítica. MARCO TEÓRICO. Las representaciones mentales del sujeto que aprende constituyen la base del conocimiento matemático. Un objeto matemático es un emergente de un sistema de prácticas a partir de la utilización de diferentes registros semióticos y la realización de transformaciones y conversiones entre ellos, que no son espontáneas sino que deben enseñarse. METODOLOGÍA. Se selecciona el tema *diagonalización de formas cuadráticas*, desarrollado desde el álgebra y la geometría analítica y se utilizan diversos recursos digitales interactivos que posibilitan la visualización simultánea en diversos registros. RESULTADOS. Los objetos digitales brindan una perspectiva dinámica de las transformaciones y de la correlación con la variación de parámetros contenidos en las ecuaciones. Las representaciones efectuadas por computadora, en especial mediante objetos y/o softwares interactivos resultan particularmente adecuadas para el proceso de interconversión de registros. El movimiento y la posibilidad de explorar las representaciones desde diferentes perspectivas facilitan la comprensión y la

percepción de las relaciones entre objetos matemáticos. El material preparado se inserta en un blog a disposición de los alumnos.

1. Introducción

Se presenta un conjunto de recursos didácticos que tiene por objeto facilitar la visualización del proceso de rototraslación de cónicas en el marco de la asignatura "Álgebra y Geometría Analítica" de carreras de ingeniería. Se trata de tres objetos digitales construidos sobre una plataforma de geometría dinámica de libre disponibilidad en Internet.

El trabajo intenta fomentar una integración de las herramientas tecnológicas que resultan familiares para los alumnos a los contenidos la asignatura de modo no ocasional, sino planificado a lo largo del curso. La construcción de estos objetos digitales, también llamados *applets* o microaplicaciones es posible gracias a las tecnologías de la información y comunicación [1]. La incorporación de estas herramientas a los procesos educativos permite una personalización de los procesos de aprendizaje, ofreciendo a los alumnos la oportunidad de aprehender los conceptos con mayor participación y menos control e intervención del docente. Esta orientación, además, debiera ser especialmente intensa en los primeros años de estudio de las carreras, donde tiene lugar la adquisición de los conocimientos básicos (Tedesco, 2009, págs. 50-55, 77).

La disponibilidad de *objetos digitales de aprendizaje*, "herramientas interactivas en red que permiten el aprendizaje de conceptos específicos para ampliar, potenciar y guiar los procesos cognitivos de los aprendices" (Kay & Knaack, 2009, pág. 6), ha crecido velozmente desde principios de la década de 1990 (Walsh, 2006, pág. 13ss.), particularmente aquellos que se refieren a algún tema de la matemática, y que por ello también se los denomina *mathlets*. Sus principales características son la flexibilidad y elevado grado de interactividad (Silva, 2005, pág. 19), al producir respuestas inmediatas ante las acciones ejercidas sobre el objeto por parte de los usuarios (Engelbrecht & Harding, 2005b, pág. 254; Engelbrecht & Harding, 2005a, págs. 243-244; Allen, 2003, págs. 270-274). Estas herramientas brindan asimismo la posibilidad de comprobar inmediatamente conjeturas formuladas en el curso de la resolución de un problema.

La interactividad de los objetos digitales es consistente con los modos de aprender de la así llamada generación digital, que combina, modifica, produce y comparte contenidos mediante la interacción, utilizando diferentes dispositivos (Silva, 2005, pág. 14). Así, los integrantes de esta generación están "llegando a convertirse en autores, al desarrollar las múltiples aplicaciones que ofrece el software libre o social, weblogs, podcastings, wikis…" (Pozo & Monereo, 2009, pág. 15).

Ahora bien, la creación de estos recursos demanda un buen número y diversidad de habilidades al profesor; Moreau (2002, págs. 2-5) detalla algunas de ellas: (a) concebir contenidos aptos para ser presentados mediante una computadora; (b) prever escenarios anticipando las reacciones del auditorio al cual están destinados; (c) comunicación no presencial; (d) diseño de la presentación; (e) programación elemental; (f) desarrollo de las aplicaciones; (g) administración de los recursos; (h) gestión de equipos de trabajo multidisciplinarios. Aun cuando ciertos docentes puedan reunir muchas de estas habilidades, un curso de una asignatura no es tarea de una sola persona, sino que se necesita un equipo completo. Sin embargo, para cursos introductorios de cálculo y álgebra y geometría analítica, la utilización de una plataforma como GeoGebra pone al alcance de todos los docentes la elaboración de objetos digitales que cumplan razonablemente con principios de diseño establecidos por expertos (Butson, 2005; Day & Kalman, 1999; Kalman, 2005; Miller & Upton, 2008; Park y Hopkins 1993, pág. 444-445; Milheim, 1993, pág. 177).

En resumen, la incorporación de tecnología para el aprendizaje de la matemática tiene por objeto crear un entorno significativo para los estudiantes, basado en procesos matemáticos y no en algoritmos. Ejemplos de estos procesos son exploraciones desde el enfoque numérico y geométrico, formulación de predicciones e hipótesis y explicación, justificación y demostración de las mismas (Hershkowitz, y otros, 2002, pág. 658).

2. Referentes teóricos-conceptuales

Este apartado presenta los lineamientos teóricos en que se fundamenta la construcción de objetos digitales para el aprendizaje del álgebra y la geometría analítica.

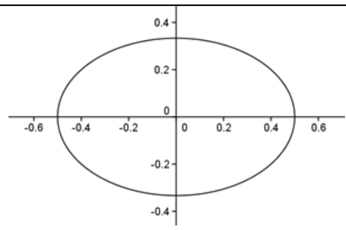
La teoría de los registros semióticos

La noción de *representación* está presente en todo proceso de adquisición de conocimientos. Son representaciones las creencias o concepciones y a las cuales se accede a través de la producción verbal o escrita del sujeto que aprende. También se entiende por representación un conjunto de signos y sus asociaciones realizadas según ciertas reglas, que permite la descripción de un sistema, un proceso o un grupo de fenómenos. Así, las representaciones semióticas constituyen herramientas para producir nuevos conocimientos y no sólo para comunicar representaciones mentales. La diferencia entre la actividad cognitiva para aprender matemática y la que se requiere en otras disciplinas reside en las siguientes características: (a) el procesamiento matemático siempre requiere la sustitución de una representación semiótica por otra; lo más importante son las transformaciones, no las representaciones mismas; (b) los objetos matemáticos a conceptualizar no existen como objetos reales (D'Amore, 2001, pág. 6), sino que sólo son accesibles por medio de sus representaciones semióticas. Esta característica plantea un conflicto, ya que la comprensión en matemática requiere distinguir entre el objeto y sus representaciones; más aún, la habilidad para pasar de una representación a otra es lo que marca el progreso en el aprendizaje; (c) la matemática utiliza una variedad de representaciones semióticas: algunos procesos son más sencillos en un sistema de representación que en otro y muchas veces se requiere el uso de dos registros simultáneos, como por ejemplo en geometría analítica debe emplearse el registro algebraico y el gráfico para la visualización de los objetos (Duval, 2006, págs. 106-108).

La actividad matemática consiste esencialmente en la transformación de representaciones, de las cuales existen dos clases: *tratamientos* y *conversiones*. Los tratamientos son transformaciones dentro del mismo registro; las conversiones son pasajes de un registro a otro sin cambiar el objeto denotado (tabla 1).

Tabla 1. Ejemplos de transformaciones entre representaciones

Tratamiento				
$4x^2 + 9y^2 = 36$	$\rightarrow$	pasaje a la forma canónica dentro del registro	$\rightarrow$	$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$

	algebraico	
$4x^2 + 9y^2 = 36$ →	**Conversión** pasaje al registro gráfico	

Elaboración propia con GeoGebra

Cuando Duval habla de “registros de representación semiótica” se refiere a un sistema de signos que permite cumplir las funciones de comunicación, tratamiento y objetivación. Un sistema semiótico no es un mero instrumento sino que forma parte del funcionamiento mismo del pensamiento y del conocimiento (D'Amore, 2001, pág. 6).

Visualización

La *visualización* es, según Presmeg (2006, pág. 206), el proceso de construcción y transformación de imágenes y todo tipo de inscripciones (representaciones gráficas) de naturaleza espacial que intervienen en actividades matemáticas. Una *imagen visual* es una construcción mental que representa información visual o espacial. Por su parte, Arcavi (2003) define visualización como

la habilidad, el proceso y el producto de la creación, interpretación, utilización y reflexión acerca de imágenes, figuras o diagramas, en nuestra mente, en papel o mediante herramientas tecnológicas, con el propósito de representar y comunicar información, reflexionar y desarrollar ideas y avanzar en la comprensión de conceptos (Arcavi 2003, 216).

Resulta entonces que la visualización es un proceso activo ya que las representaciones requieren interpretación por parte del sujeto que las percibe.

Una de las perspectivas teóricas que explica el rol de las representaciones gráficas en el aprendizaje es la *hipótesis del argumento visual* (Waller, 1981; Larkin & Simon, 1987; Robinson & Kiewra, 1995; Winn, 1991; Tversky, 1995, 2001); esta teoría toma en cuenta los procesos perceptivos e interpretativos que tienen lugar cuando los estudiantes extraen significado a partir de representaciones gráficas y afirma que éstas son más efectivas que el texto para comunicar información porque el procesamiento de gráficos es menos demandante que el de los textos (Vekiri, 2002, pág. 262). Estos procesos son particularmente importantes en el caso de la matemática, ya que la comprensión de esta disciplina está estrechamente relacionada con la habilidad para coordinar el pensamiento visual y el analítico, que algunos investigadores consideran mutuamente dependientes (Zaskis, Dubinsky, & Dautermann, 1996, pág. 437).

*"*Herramientas que permiten mostrar*"* es la definición de Litwin (2009,19) para las tecnologías aplicadas a la enseñanza y explica: *"*mostrar es para que se vea y mostrar es para que se entienda". La visualización asistida por computadora permite a los estudiantes acceder al conocimiento matemático basado en el hacer, tocar, mover y observar, ya que mostrar figuras no basta para que los estudiantes construyan imágenes mentales o utilicen diversas representaciones (Dorfler, 1991, citado por Haciomeroglu (2011, pág. 134)). La interactividad, "cualidad intrínseca de las tecnologías informáticas, las cuales permiten al usuario operar con recursos de conexión y de navegación en un campo de referencias multidireccionales, permitiendo adentrarse, manipular y modificar" (Silva 2005, 17), es uno de los rasgos que definen a los objetos digitales de aprendizaje. En el aprendizaje asistido por computadora, es la interactividad la que posibilita la visualización interpretativa al permitir que el estudiante controle y manipule partes de la presentación, ponga a prueba hipótesis y observe las consecuencias de sus acciones (Bennett y Dwyer 1994, 23). A mayor interactividad entre el estudiante y los objetos digitales, mayor es el nivel de visualización interpretativa. Los dispositivos interactivos que posibilitan que el estudiante asuma un rol activo en el proceso de aprendizaje contribuyen a mejorar sus habilidades para seleccionar, adquirir, construir e integrar conceptos (Bennet y Dwyer 1994, 23).

La visualización a través de representaciones dinámicas como GeoGebra permite a los estudiantes experimentar, por ejemplo, qué significa *trasladar* horizontalmente una cónica moviendo un cursor de izquierda a derecha (la cónica se desplaza en la pantalla en la misma dirección en que se mueve la mano del sujeto), observar qué propiedades de la figura resultan invariantes y, de manera simultánea, en qué se traduce ese movimiento en la expresión algebraica de la cónica $(x-h)^2+2(y-k)^2=1$, qué elementos varían en ella y cuáles se mantienen constantes (figura 1a y 1b).

Figura 1a. Elipse $(x-1)^2+2y^2=1$

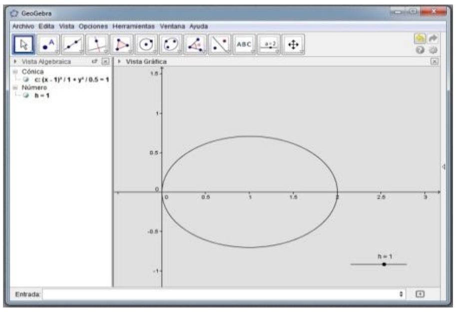
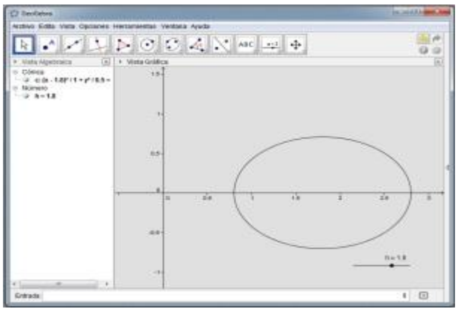


Figura 1b. Elipse $(x-1.8)^2+2y^2=1$



Elaboración propia con GeoGebra

El cursor puede colocarse también verticalmente, de modo que el sujeto, a través de un movimiento de abajo hacia arriba en la pantalla, provocará un desplazamiento vertical en la cónica (figura 2a y 2b).

Figura 2a. Elipse $(x-0.5)^2+2y^2=1$

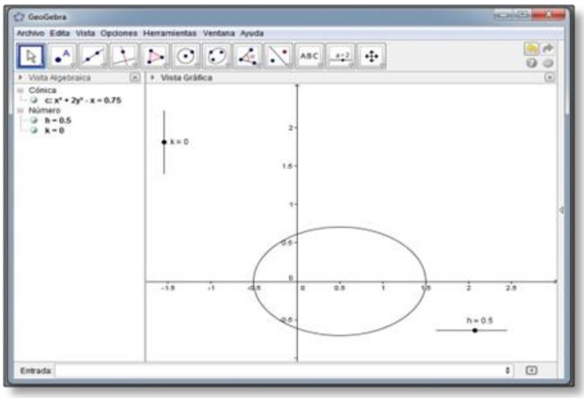
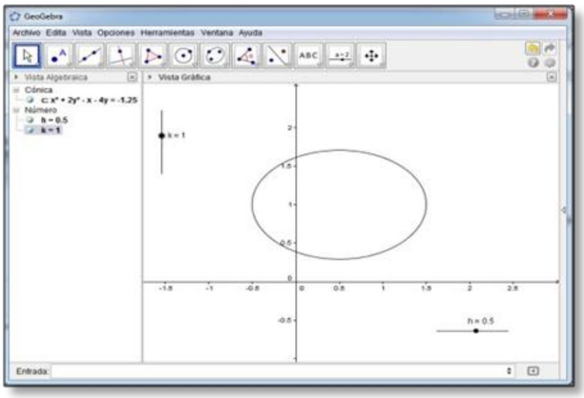


Figura 2b. Elipse $(x-1.8)^2+2y^2=1$



Elaboración propia con GeoGebra

GeoGebra vincula las representaciones gráfica y algebraica y permite que el usuario gobierne el desplazamiento en ellas mediante un único control, el cursor deslizante.

Las representaciones dinámicas y el vínculo entre diferentes representaciones contribuye a un mejor procesamiento de la información y a una mayor comprensión (Karadag & McDougall, 2011, pág. 175).

No obstante, se ha señalado que algunos de los estudiantes que utilizan aplicaciones virtuales interactivas desarrollan frecuentemente concepciones matemáticas no esperadas por los profesores ni por los diseñadores (Olive y otros 2010, 154). Asimismo, Mayer y Anderson (1991) y Mayer y Moreno (2002) citados por Phillips y otros (2010, 78), observan que la visualización no genera automáticamente comprensión en los estudiantes y que resulta ineficaz si no va acompañada de explicaciones.

Artefactos e instrumentos

Los dispositivos tecnológicos presentan dos facetas. Son objetos (*artefactos*) que han sido construidos de acuerdo a ciertos principios, con base en un conjunto de conceptos matemáticos y con determinado propósito, y son también *instrumentos*, esto es, artefactos con sus modalidades de uso por parte el estudiante que está al frente de la pantalla. Estas modalidades de uso funcionan como organizadores de la actividad del estudiante. Según este punto de vista, denominado enfoque instrumental, un instrumento es una construcción interna que realiza el sujeto a medida que lo usa según diversos esquemas de acción. Emergen así diferentes instrumentos, aun cuando el artefacto sea el mismo. La coordinación entre diferentes modalidades de uso da origen a una relación entre el usuario y el artefacto en lo que este enfoque denomina *génesis instrumental* (Mariotti, 2002, pág. 703).

¿De qué manera la génesis instrumental contribuye a la construcción de significado? La computadora se constituye en un mediador semiótico de dos maneras: el estudiante utiliza el artefacto de acuerdo a ciertas indicaciones para llevar a cabo las actividades propuestas; en este caso el significado emerge de la participación del sujeto en la tarea; el docente, por su parte, utiliza el artefacto de acuerdo con ciertas pautas relacionadas con un objetivo de enseñanza guiando al alumno en la construcción de significados matemáticamente consistentes. Es decir, que es el docente quien, a través de estrategias de comunicación, ayuda al estudiante a encontrar el significado matemático incorporado en el artefacto que podría de otro modo permanecer inaccesible al usuario (íd., pág. 708).

Los medios de visualización asistidos por computadora deben reunir ciertas condiciones: la presentación debe incluir explicaciones verbales, las representaciones y animaciones deben guardar cierta fidelidad con los fenómenos representados y los materiales deben ser apropiados para el nivel de conocimientos previos y habilidades interpretativas que poseen los alumnos (Park y Hopkins 1993, pág. 444-445). De acuerdo con Milheim (1993, pág. 177) las animaciones deben ser sencillas, fáciles de entender, focalizarse en objetivos importantes e incluir opciones para variar la velocidad de presentación. Los gráficos dinámicos en los cuales los estudiantes puedan variar los parámetros intervinientes resultan particularmente adecuados en los casos en que se requiere visualización espacial.

Algunos principios de diseño consistentes con este marco conceptual, según las recomendaciones del “d’Arbeloff Interactive Mathematics Project” del MIT (Miller & Upton, 2008) son: (a) presentar un concepto delimitado, minimizando la complejidad de la herramienta y maximizando la simplicidad de la ilustración; (b) presentar la información en una variedad de formatos (gráfico, simbólica, numérica), induciendo las traducciones entre ellos; (c) incorporar elevado nivel de interactividad, permitiendo percibir de inmediato los efectos de las acciones (d) dosificar la información en la medida que lo requiera el usuario (e) controlar que el fundamento matemático subyacente en el mathlet sea riguroso. Estos principios se resumen en la Tabla 2.

Tabla 2. Principios teóricos de diseño de los applets para álgebra y geometría analítica

Principios teóricos de diseño de applets con GeoGebra	
1. Contigüidad	La aplicación interactiva, el texto introductorio y las tareas propuestas deben presentarse, en lo posible, en una única página. No incluir una excesiva cantidad de actividades ni de texto estático en cada applet. Los rótulos dinámicos deben colocarse cerca de los respectivos objetos. Las relaciones de la información textual o numérica con los objetos gráficos podrían ser sugeridas por alguna correspondencia de colores.
2. Coherencia	Los objetos gráficos presentes en la pantalla deben ser nítidamente diferenciados y rotulados y sólo debe incluirse aquéllos que intervengan en la construcción del concepto. No deben incluirse elementos decorativos.
3. Interactividad	Permitir la máxima interactividad en el applet. Como regla general, todo objeto gráfico debería ser movible o cambiar alguna de sus características.
4. Personalización	La redacción debe ser sencilla, precisa y dirigida al estudiante. Las preguntas deben ser específicas y cada una debe apuntar

	a un único concepto.
5.Rigor matemático	Las modificaciones de los registros desencadenadas por las operaciones deben estar sustentadas rigurosamente en la base matemática del concepto que pretenden ilustrar.
6. Actividades	Las actividades con breves consignas que dejen libertad de movimientos para ejecutarlas deben comprender los registros algebraico y gráfico, en forma conjunta y también por separado.

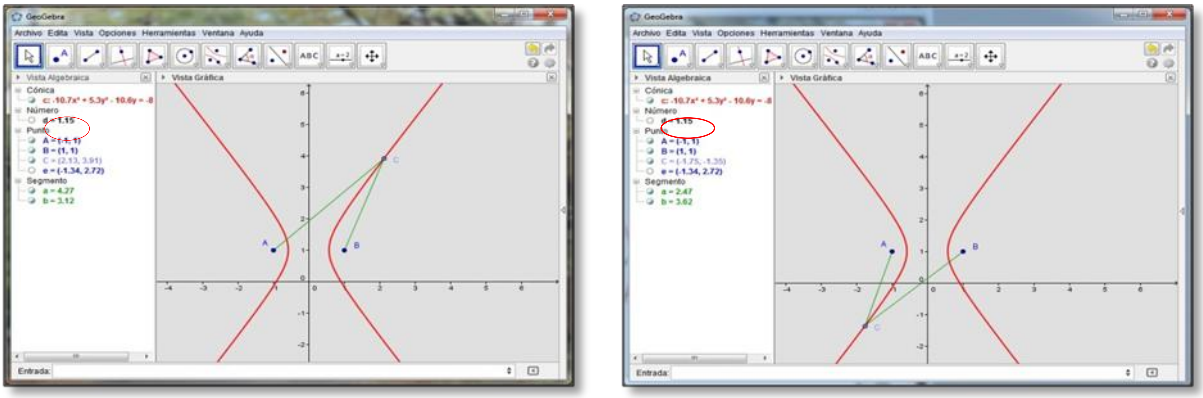
Elaboración propia, en base a Hohenwarter & Preiner (2007, pág. 22).

Por último, la inclusión de actividades para hacer con lápiz y papel es fundamental para que el estudiante pueda aprovechar este recurso, ya que la manipulación de los controles del applet no garantiza por sí sola la aprehensión de los conceptos y que el usuario llegue a conclusiones correctas. El estudiante no debe perder de vista en ningún momento que hay una teoría que posibilita la práctica que está experimentando. En otro trabajo hemos denominado *antimathlets* a las actividades incluidas en el objeto digital que sólo pueden realizarse con lápiz y papel (Martins & Acero, 2011, pág. 2).

3. Aspectos metodológicos

Para la construcción de los applets se selecciona la plataforma de geometría dinámica GeoGebra. Entre las razones para la elección se han tenido en cuenta criterios formulados por Hershkowitz y otros (2002, pág. 662) tales como su *generalidad* (aplicabilidad a diversas áreas y disponibilidad), su *potencial para desarrollar procesos de matematización* (Romberg & Kaput, 1999; Freudenthal, 1968; Gravemeijer y Doorman, 1999; Kwon 2002) por parte de los estudiantes durante la resolución de problemas y su *poder comunicacional* (o poder como mediador semiótico), esto es, la capacidad del software para el lenguaje matemático. En lo que respecta a su generalidad, GeoGebra permite desarrollar aplicaciones para el cálculo, álgebra y geometría. En su capacidad de matematización, el software permite elaborar una formulación matemática para problemas reales. Considérese, por ejemplo, la definición de hipérbola. La figura 3 muestra una hipérbola construida con GeoGebra a partir de tres puntos A y B, fijos, llamados *focos* y un punto C que es posible desplazar sobre la curva. El usuario puede mover el punto C sobre la curva seleccionándolo con el mouse, comprobando que el valor absoluto de la diferencia $d = |\overline{AC}| - |\overline{BC}|$ permanece constante, en este caso $d = 1.15$, (resaltado en el registro algebraico (figura 3).

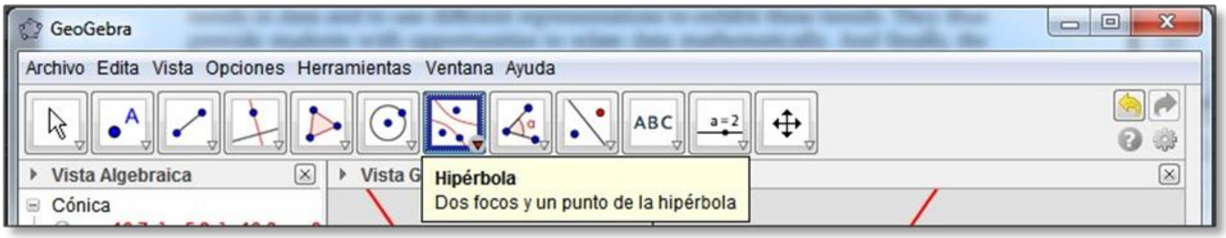
Figura 3. Hipérbola con focos en los puntos $A = (-1,1)$ y $B = (1,1)$



Elaboración propia con GeoGebra

En el aspecto comunicacional, la curva se construye simplemente seleccionando la opción “Hipérbola, dos focos y un punto de la hipérbola”, según se muestra en la figura 4.

Figura 4. Detalle del panel de herramientas de GeoGebra



Elaboración propia con GeoGebra

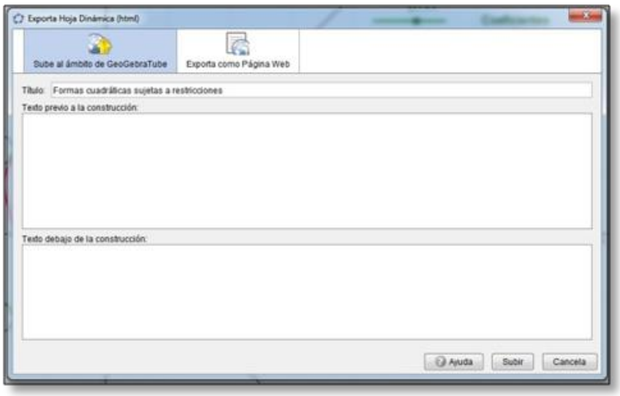
La notación empleada en los registros gráfico y algebraico es la de uso corriente en textos de la disciplina; un determinado objeto matemático se presentará en el mismo color en ambos registros; por ejemplo, la ecuación de la hipérbola aparece en rojo si se elige este color para esta curva en el registro gráfico (figura 3).

Otras ventajas adicionales consisten en que no requiere que el docente tenga conocimientos técnicos de programación y además un alumno puede manipular la aplicación instalándola en su computadora o bien trabajando *on line*. La aplicación se puede descargar libre y gratuitamente (http://www.geogebra.org/), ocupa poco espacio (97.5 Mb en la versión 4.2.51.0) y puede ser libremente reproducida y utilizada con fines no comerciales[2].

Hohenwarter (creador de GeoGebra) y Preiner (2007, págs. 1-29) brindan detalladas instrucciones[1] para la creación de applets y su inserción en páginas web dinámicas, como así también principios de diseño, algunos de los cuales han sido mencionados en la tabla 2, y diversos ejemplos.

Finalizado el applet es posible alojarlo en una página web con la extensión .html. Para ello se selecciona del menú "Archivo" – "Exporta" – "Hoja dinámica como página web (html)". El menú desplegable de la figura 5 permite asignar un título y autor e insertar comentarios previos y posteriores a la aplicación. También es posible alojarlo en un blog.

Figura 5. Menú para la asignación de título y comentarios en la página web con la aplicación de GeoGebra



Elaboración propia con GeoGebra

En la tabla 3 se indica de qué modo y en qué medida uno de los applets diseñados cumple con los principios enunciados en la tabla 2.

---

[1] Disponibles en versión interactiva en: http://www.maa.org/joma/Volume7/Hohenwarter2/index.html

Tabla 3. Grilla de verificación de cumplimiento de los principios de diseño de la tabla 2

Verificación del cumplimiento de los principios de diseño para el applet DiagFormasCuad	
El concepto presentado	El applet posibilita graficar cónicas con centro, modificar su género y rotarlas variando los coeficientes de la matriz asociada mediante controles deslizantes. En el registro algebraico se presentan la matriz asociada, los valores y vectores propios, el determinante y la traza de la matriz, las ecuaciones de los ejes rotados.
1. Contigüidad	Para evitar problemas de compatibilidad entre algunos componentes y de conectividad en otros casos, se inserta en el blog el archivo .ggb y un archivo de texto por separado. Se establece una correspondencia de colores entre el gráfico de la cónica, los cursores deslizantes que permiten variar los coeficientes de la matriz asociada a la forma cuadrática y, en el registro algebraico, la ecuación de la cónica, la matriz A asociada a la forma cuadrática y los valores de los coeficientes; todos ellos se muestran en color rojo. Los ejes rotados y sus respectivas ecuaciones se representan en color verde y los vectores que los dirigen, con sus expresiones algebraicas, en azul.
2. Coherencia	Se incluyen sólo los elementos indispensables, debidamente identificados y rotulados. La posición de los controles deslizantes se ha inmovilizado en la pantalla, procurando que no interfiera con el resto de los elementos, pero es posible desplazar la vista gráfica en su conjunto para visualizar mejor sus características principales.
3. Interactividad	Presenta la máxima interactividad. Más aún, los estudiantes pueden modificar la aplicación en su totalidad, agregando o quitando elementos, cambiando la apariencia o seleccionando qué elementos mostrar, o el número de parámetros que es posible variar.

4. Personalización	La aplicación y las actividades se refieren a un único concepto y las consignas e indicaciones están redactadas en lenguaje sencillo.
5.Rigor matemático	Las operaciones que realiza el applet y los gráficos desplegados son correctos desde el punto de vista matemático. Por otra parte, es posible corroborar su funcionamiento trabajando con lápiz y papel. Parte de este trabajo se incluye en las actividades.
6. Actividades	Las actividades son variadas, algunas de ellas pueden hacerse tanto con el applet como con lápiz y papel y otras que se realizan más fácilmente con el applet. Se incluye asimismo una actividad integradora.

Elaboración propia, en base a (Hohenwarter & Preiner, 2007, pág. 22).

4. Resultados alcanzados y/o esperados

Para asegurar el buen funcionamiento de los recursos elaborados en diversos contextos se los incorpora a un blog como archivos con la extensión .ggb (que pueden abrirse accediendo al sitio de GeoGebra[2] para trabajar en línea o bien con el software instalado en el equipo) junto con un documento de texto que contiene el material introductorio[3], un breve resumen de los fundamentos teóricos[4], las actividades y las referencias bibliográficas[5]. Este material se incluye como notas al final del presente trabajo.

a) El objeto digital ValVectProp1.ggb

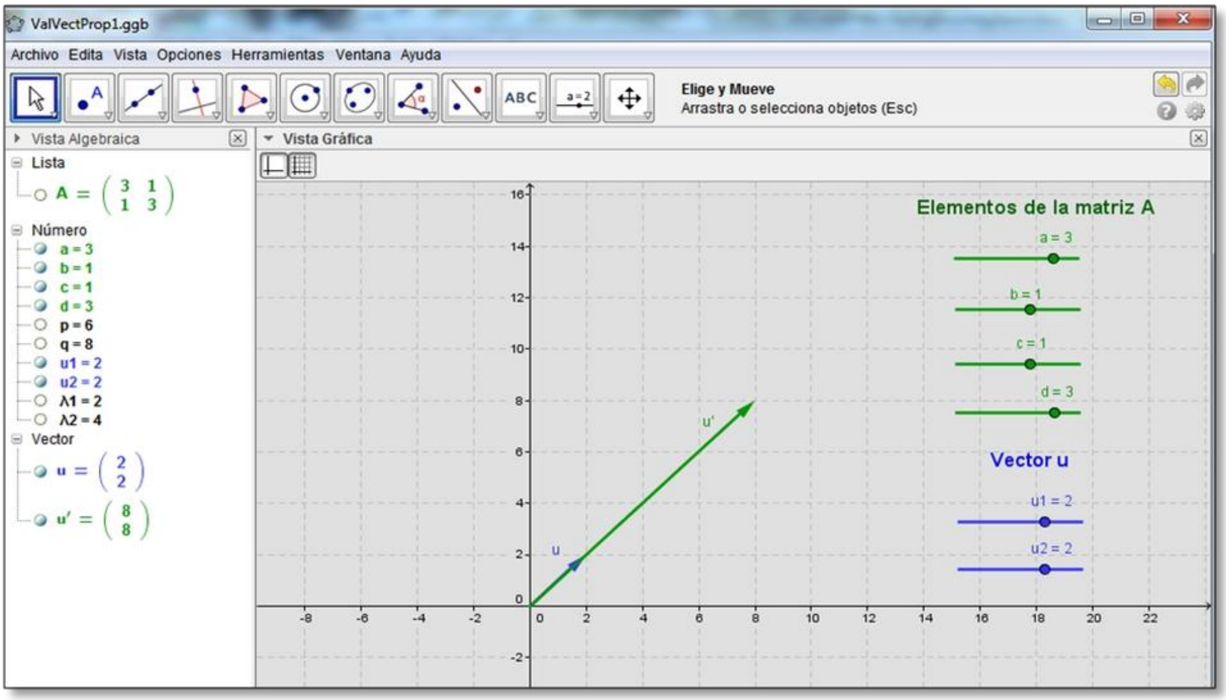
Esta aplicación tiene carácter introductorio y permite determinar los valores y vectores propios (cuando éstos son reales) de matrices con elementos reales de 2 x 2. Teniendo presente las definiciones de valor y vector propio, el applet permite detectarlos seleccionando los elementos de la matriz $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ y variando los valores de las componentes del vector $u = (u1, u2)$, representado en color azul hasta que el vector verde Au tenga igual dirección que el vector u. De este modo, el

[2] http://www.geogebra.org/webstart/4.4/geogebra.html

vector u resulta ser un vector propio de la matriz A . En el registro algebraico, a la izquierda de la pantalla, se muestran asimismo los valores propios λ_1, λ_2 cuando éstos son reales. Para determinar a cuál de ellos está asociado el vector u , el estudiante debe resolver con lápiz y papel la ecuación que los vincula, $Au = \lambda u$.

En la figura 6 se muestra el vector propio $u = \binom{2}{2}$ de la matriz $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, que corresponde al valor propio $\lambda_2 = 4$. A las actividades propuestas, que se exhiben en la figura 7, puede agregarse alguna que requiera modificar el applet, como por ejemplo, graficar subespacio generado por cada vector propio detectado, esto es, la recta dirigida por el vector u .

Figura 6. Objeto digital ValVectProp1.ggb



Elaboración propia con GeoGebra

Figura 7. Actividades para realizar con el objeto digital ValVectProp1.ggb

(a) Trabajando con el objeto digital ValVectProp1.ggb, seleccione los valores de las componentes del vector $u = (u1, u2)$, mediante los cursores deslizantes, a fin de identificar los vectores propios de la matriz $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$. ¿cuáles son sus valores propios? Corrobore sus observaciones trabajando con lápiz y papel y efectuando los cálculos correspondientes.

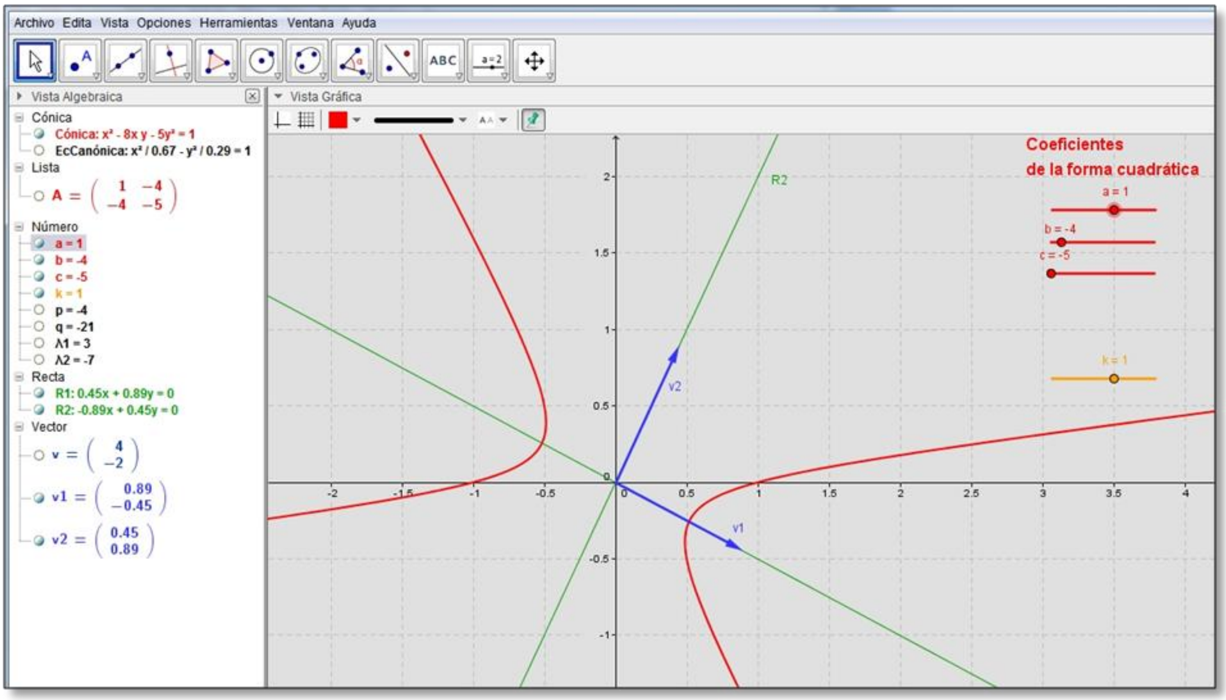
(b) Repita la actividad con la matriz $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$. ¿Es posible determinar vectores propios para esta matriz? Determine los valores propios trabajando con lápiz y papel. Explique el efecto que produce la multiplicación Au que visualiza mediante el objeto digital ValVectProp1.ggb.

(c) Trabajando con el objeto digital ValVectProp1.ggb repita la actividad con la matriz $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. ¿Es posible determinar vectores propios para esta matriz? Determine, si es posible, los valores propios trabajando con lápiz y papel.

(d) Grafique con el objeto digital los espacios propios generados por cada uno de los vectores propios detectados.

Elaboración propia

Figura 8. Objeto digital DiagFormasCuad



Elaboración propia con GeoGebra

b) El objeto digital DiagFormasCuad.ggb

Este objeto (figura 8) permite graficar la cónica con centro $ax^2 + 2bxy + cx^2 = k$, cuya matriz asociada es $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$. Es posible seleccionar los elementos de la matriz A y el valor del parámetro k y, en el registro gráfico, se exhibe la cónica resultante (en rojo) respecto del sistema de ejes original y los nuevos ejes, representados en verde, dirigidos por los vectores propios $v1$ y $v2$.

El registro algebraico presenta la ecuación original de la cónica y su ecuación canónica. De la matriz A se muestran su traza p determinante q , sus valores propios, $\lambda 1, \lambda 2$ y los vectores propios asociados a cada uno de ellos, $v1, v2$, en azul. Las ecuaciones de los nuevos ejes $R1, R2$ se muestran en verde. La aplicación permite determinar el género, verificar el efecto de la variación de cada uno de los parámetros (los coeficientes a, b, c, d de la matriz A y el valor k de la forma cuadrática) y detectar formas degeneradas o casos en que la ecuación no representa lugar geométrico alguno.

Las actividades propuestas se muestran en la figura 9. El objetivo de la actividad 1 es que el estudiante se familiarice con la aplicación, determinando el género de dos cónicas. Mediante la actividad 2 se investiga el efecto de la variación del parámetro b asignándole inicialmente el valor cero aumentándolo en valor absoluto. Algunas particularidades de este conjunto de cónicas resultan más sencillas de verificar a través de la manipulación del applet que en forma analítica. Asimismo se investiga la relación entre los valores propios y las formas degeneradas. La actividad 3 tiene carácter integrador y combina el trabajo con el applet y la resolución con lápiz y papel y tiene como objetivo determinar el rango de variación de los parámetros para cada tipo de cónica o forma degenerada.

c) El objeto digital RotoTraslacCónica.ggb

El applet RotoTraslacCónica.ggb permite graficar la cónica $ax^2 + 2bxy + cx^2 + dx + ey = k$, cuya expresión matricial es $(x \quad y)\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + (c \quad d)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = k$. El objeto calcula los valores propios λ_1, λ_2 y los correspondientes vectores propios v_1, v_2, representados en azul. En la figura 10, los ejes rotados, dirigidos por estos autovectores, aparecen en línea punteada azul claro y los ejes rotados y trasladados se muestran en color verde.

En el registro algebraico se presenta la ecuación original de la cónica en color naranja, al igual que la curva, el centro $B = (m, n)$ y el sistema original de ejes coordenados, y la ecuación canónica, $\lambda_1(x' - m)^2 + \lambda_2(y' - n)^2 = 1$, en verde. Un detalle de la misma se observa en la figura 11. El centro de la cónica puede variarse mediante los controles deslizantes c y d .

Figura 9. Actividades para realizar con el objeto digital DiagFormasCuad.ggb

1. En los ejercicios siguientes se pide, si es posible, graficar la cónica empleando el objeto digital DiagFormasCuad.ggb e identificarla.

(a) $-x_1^2 + 6x_1x_2 - x_2^2 = 1$
(b) $2x_1^2 + 64x_2 + 5x_2^2 = 6$

2. Trabajando con el mismo objeto digital

(a) utilice los comandos deslizantes para ajustar los coeficientes de la matriz de la forma cuadrática de modo que resulte $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$. Identifique la cónica y observe los valores de la traza, el determinante de la matriz y los signos de los valores propios.

(b) dejando fijos los valores de $a = 1, c = -3$, investigue el efecto del parámetro b deslizando el control correspondiente. ¿Se modifican los signos de los valores propios? ¿qué sucede para valores grandes del valor absoluto de b?

(c) seleccionando $b = -2$, ¿qué valores de a y c resultan en un par de rectas paralelas? ¿cuánto valen los valores propios en esos casos? Con $a = 1$, $b = -2$ ¿qué rango de valores de c da como resultado una elipse?

(d) ¿cuáles son los valores y vectores propios en el caso en que $A = I$, donde I es la matriz identidad de 2 x 2? Identifique la cónica resultante si $A = kI$ para distintos valores de $k \in \mathbb{R}$.

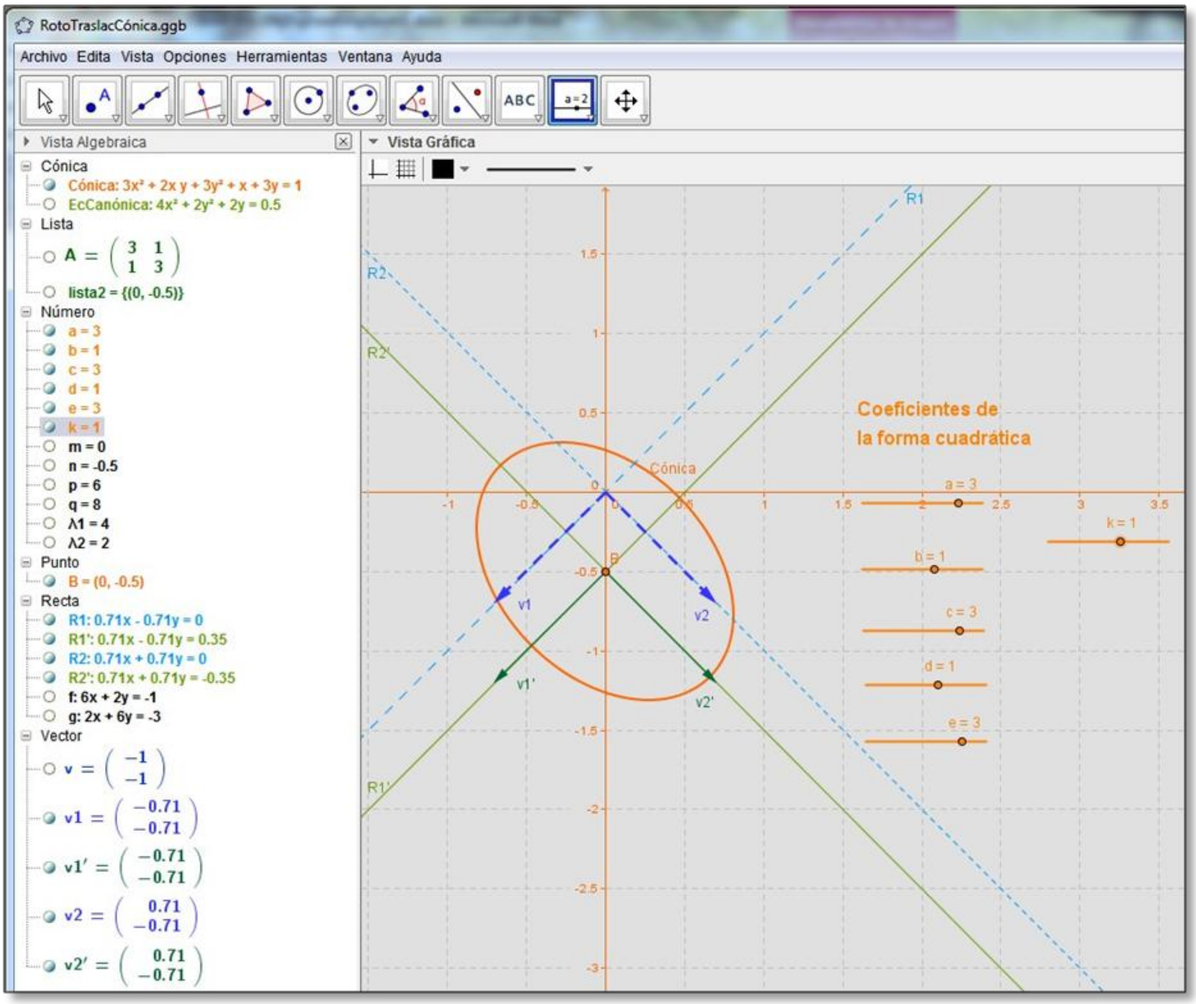
3. Sea A una matriz simétrica de $n \times n$ y sea k un escalar. Trabajando con lápiz y papel, pruebe que el gráfico de la ecuación cuadrática $x^T A\, x = k$ es:

(a) una hipérbola si $k \neq 0$ y $\det A < 0$
(b) una elipse, circunferencia o cónica imaginaria si $k \neq 0$ y $\det A > 0$
(c) un par de rectas o una cónica imaginaria si $k \neq 0$ y $\det A = 0$
(d) un par de rectas o un único punto si $k = 0$ y $\det A \neq 0$.
(e) una recta si $k = 0$ y $\det A = 0$ (Poole 2006, 428).
Compruebe estas afirmaciones con el objeto digital DiagFormasCuad.ggb.

Elaboración propia en base a Poole, 2006, pág. 428

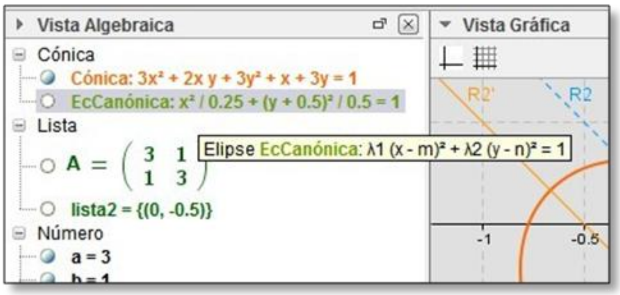
Este applet permite incorporar otro género de cónicas, las parábolas y añade la traslación de ejes. Las actividades propuestas tienen un carácter más integrador, por lo cual se sugiere el trabajo con el mismo hacia el final de la unidad temática, como actividad de cierre. Se incorporan asimismo, elementos tales como la localización de focos y determinación de la excentricidad que proponen una línea de trabajo complementaria para las cónicas.

Figura 10. Objeto digital RotoTraslacCónica.ggb



Elaboración propia con GeoGebra

Figura 11. Detalle de la vista algebraica del objeto digital RotoTraslacCónica.ggb



Elaboración propia con GeoGebra

Figura 12. Actividades para realizar con el applet RotoTraslacCónica.ggb

1. Dada la expresión $kx^2 + 2y^2 - 8x = 0$,

(a) indicar qué cónicas representa para distintos valores de k, con el objeto digital RotoTraslacCónica.ggb. ¿Cómo se comporta la curva para $k \to \infty$ y para $k \to -\infty$?
(b) trabajando con lápiz y papel, obtenga la ecuación canónica. Compare sus resultados con los que proporciona el applet.

2. Construir los siguientes sistemas de cónicas y verificar que todas las cónicas de un mismo sistema son homofocales.

(a) $16(x-k)^2 + 9y^2 = 144$
(b) $(y-k)^2 = 4x$

3. Construir los sistemas de cónicas dados y discutir los lugares geométricos a medida que k se aproxima a cero y al infinito. Observar cómo se comportan los focos en cada caso.

(a) $\frac{(x-k)^2}{k^2} + \frac{y^2}{36} = 1$
(b) $\frac{(x-k)^2}{k^2} - \frac{y^2}{36} = 1$

4. Sea c la cónica de ecuación $x^2 + y^2 = 2x + 2y + 2xy$; trabajando con el applet RotoTraslacCónica.ggb identificar su género y

(a) trabajando con lápiz y papel definir una adecuada transformación de coordenadas que permita identificar sus elementos principales y graficarla aproximadamente indicando las dos bases de referencia, corroborando el resultado con el applet;
(b) hallar todos los $b \in \mathbb{R}$ tales que la recta de ecuación $y = b - x$ resulte tangente a la cónica c y el correspondiente punto de tangencia.

5. Por medio del applet RotoTraslacCónica.ggb identificar el género de la cónica dada por la ecuación $4x^2 - 4xy + 7y^2 + 12x + 6y = 9$ en la base canónica de $\mathbb{R}^2$.

(a) trabajando con lápiz y papel efectuar una traslación del sistema original y escribir la ecuación en las variables u y v;
(b) definir una rotación adecuada y escribir la ecuación canónica de la elipse en las variables t, w.
(c) determinar la posición del centro de la cónica, el valor del coseno del ángulo θ de rotación y la excentricidad.

Elaboración propia en base a Smith & Gale, 1980, pág. 205

La flexibilidad del recurso, la posibilidad que tiene el usuario de modificarlo según sus necesidades, junto con la variedad de actividades propuestas abren una variedad de líneas de trabajo por parte de docentes y alumnos, incorporando nuevos elementos y actividades.

5. Bibliografía

Allen, D. (2003). A Survey of Online Mathematics Course Basics. *The College Mathematics Journal,Vol. 34, No. 4, 34*(4), 270-279.

Arcavi, A. (2003). The role of visual representations on the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 52*(3), 215-242.

Bennett, L., & Dwyer, F. (1994). The effect of varied visual interactive strategies in facilitating student achievement of different educational objectives. *International Journal of Instructional Media, 21*(1), 23-32.

Bu, L., Spector, M., & Haciomeroglu, E. S. (2011). Toward model-centered mathematics learning and instruction using GeoGebra. En L. Bu, & R. Schoen (Edits.), *Model-centered learning. Pathways to mathematical understanding usig GeoGebra* (págs. 13-40). Rotterdam: Sense Publishers.

Butson, R. (2005). Learning objects: weapons of mass instruction. *British Journal of Educational Technology Vol 34 No 5 2003 667–669, XXXIV*(5), 667-669.

D'Amore, B. (2001). Conceptualisation, registres de représentations sémiotiques et noétique: interactions constructivistes dans l'apprentissage des concepts mathématiques et hypothèse sur quelques facteurs inhibant la dévolution. *Scientia Paedagogica Experimentalis, XXXVIII*(2), 143-168.

Day, J., & Kalman, D. (1999). *Theaching linear algebra: what are the questions?* Recuperado el 21 de junio de 2008, de http://knox.knox.edu:5718/»aleahy/pcmi/

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 61*, 103-131.

Engelbrecht, J., & Harding, A. (2005a). *Teaching undergraduate mathematics on the Internet. Part 1: Technologies and taxonomy».* Recuperado el 14 de junio de 2009, de Educational Studies in Mathematics. Vol. 58, n.º 2, pág. 235-252.: http://www.springerlink.com/content/g813211q40551v29/

Engelbrecht, J., & Harding, A. (2005b). *Teaching undergraduate mathematics on the Internet. Part 2: Attributes and Possibilities.* Recuperado el 14 de juni0 de 2009, de Educational Studies in Mathematics. Vol. 58, n.º 2, pág. 235-252.: http://www.springerlink.com/content/g813211q40551v29/

Freudenthal, H. (1968). Why to teach mathematics so as to be useful? *Educational Studies in Mathematics, 1*, 3-8.

Haciomeroglu, E. S. (2011). Visualization through dynamic GeoGebra illustrations. En L. Bu, & R. Schoen (Edits.), *Model-centered learning. Pathways to mathematical understanding usig GeoGebra* (págs. 133-144). Rotterdam: Sense Publishers.

Hershkowitz, R., Dreyfus, T., Ben-Zvi, D., Friedlander, A., Hadas, N., Resnick, T., y otros. (2002). Development for computerized environments: a designer-researcher-teacher-learner activity. En L. D. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (págs. 657-694). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Hohenwarter, M., & Preiner, J. (Julio de 2007). Creating mathlets with open source tools. *The Journal of Online Mathematics and its Applications, 7*, 1-29.

Kalman, D. (2005). *Virtual Empirical Investigation: Concept Formation and Theory Justification.* Recuperado el 20 de junio de 2009, de American Mathematical Monthly 112, no. 9 (November 2005): 786-798. Academic Search Complete, EBSCOhost: http://search.ebscohost.com/login.aspx?direct=true&db=a9h&AN=18926322&lang=es&site=ehost-live

Karadag, Z., & McDougall, D. (2011). GeoGebra as a cognitive tool. En L. Bu, & R. Schoen (Edits.), *Model-centered learning. Pathways to mathematical understanding usig GeoGebra* (págs. 169-181). Rotterdam.

Kay, R., & Knaack, L. (2009). *Evaluating the learning in learning objects.* Recuperado el 27 de septiembre de 2009, de Open Learning. Vol. 22, N. 1, February 2007, pp. 5-28.Academic Search Complete, EBSCOhost : http://search.ebscohost.com/login.aspx?direct=true&db=a9h&AN=24078579&lang=es&site=ehost-live

Larkin, J. H., & Simon, H. A. (1987). Why a diagram is (sometimes) worth ten thosand words. *Cognitive Science*, 65-99.

Litwin, E. (2003). La evaluación: campo de controversias o un nuevo lugar. En A. R. Camilloni, S. Celman, E. Litwin, & M. d. Palou de Maté, *La evaluación de los aprendizajes en el debate didáctico contemporáneo* (Primera edición. Cuarta reimpresión ed., págs. 11-34). Buenos Aires: Paidós.

Mariotti, M. A. (2002). The influence of technological advances on students' mathematics learning. En L. D. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (págs. 695-723). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Martins, M., & Acero, F. (2011). Mathlets y antimathlets. En E. Borsa, L. Irasar, & O. Pavioni (Ed.), *XVI EMCI NACIONAL y VIII EMCI INTERNACIONAL (Educación Matemática en Carreras de Ingeniería).* Olavarría: Universidad del Centro de la Provincia de Buenos Aires.

Mayer, R. E., & Anderson, R. B. (1991). Animations need narrations: an experimental test of a dual coding hypothesis. *Journal of Educational Psychology, 83*, 484-490.

Mayer, R., & Moreno, R. (2002). Aids to computer-based multimedia learning. *Learning and Instruction, 12*, 107-119.

Milheim, W. D. (1993). How to use animation in computer asisted learning. *British Journal of Educational Technology, 24*(3), 171-178.

Miller, H., & Upton, D. (2008). *Computer Manipulatives in an Ordinary Differential Equations Course: Development, Implementation, and Assessment.* Recuperado el 27 de septiembre de 2009, de Journal of Science Education and Technology, v17 n2 p124-137 Apr 2008. DataBaseERIC: http://www.jstor.org/

Moreau, I. (2002). *De véritables simulations accessibles en ligne pour l'enseignement des sciences et des techniques 'applet learning.* Recuperado el 21 de junio de 2008, de Centre d'Electronique et de Micro-Optoélectronique, Courrier 084 - Université Montpellier II.

Olive, J., Makar, K., Hoyos, V., Kee Kor, L., Kosheleva, O., & Strässer, R. (2010). Mathematical knowledge and practices resulting from access to digital technologies. En C. Hoyles, & J.-B. Lagrange, *Mathematics education and tecnolgy-rethinking the terrain* (págs. 133-177). New York: Srpinger.

Park, O. C., & Hopkins, R. (1993). Instructional conditions for using dynamic visual displays: a review. *Instructional Science, 21*(6), 427-449.

Poole, D. (2006). *Linear Algebra.* Toronto: Thomson Brooks/Cole.

Pozo, J. I., & Mateos, M. (2009). Aprender a aprender: Hacia una gestión autónoma y metacognitiva del aprendizaje. En J. I. Pozo, & M. Puy Pérez Echeverría (Edits.), *Psicología del aprendizaje universitario: La formación en competencias* (Primera edición ed., págs. 54-69). Madrid: Morata.

Pozo, J. I., & Monereo, C. (2009). Introducción: La nueva cultura del aprendizaje universitario o por qué cambiar nuestras formas de enseñar y aprender. En J. I. Pozo, & M. Puy Pérez Echeverría (Edits.), *Psicología del aprendizaje universitario: La formación en competencias* (Primera edición ed., págs. 9-28). Madrid: Morata.

Presmeg, N. (2006). Research on visualization in learning and teaching mathematics. En J. Gutiérrez, & P. Boero, *Handbook on research on the psychology of mathematics education: past, present and future* (págs. 205-235). Rotterdam: Sense Publishers.

Robinson, D., & Kiewra, K. (1995). Visual argument: graphic organizers are superior to outlines in improving learning from text. *Journal of Educational Psychology, 87*(3), 455-467.

Romberg, T., & Kaput, J. J. (1999). *Mathematics worth teaching, mathematics worth understanding.* (E. Fenenema, & T. Romberg, Edits.) Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Silva, M. (2005). *Educación interactiva. Enseñanza y aprendizaje presencial y on-line.* (Primera edición ed.). Barcelona: Gedisa.

Smith, P. F., & Gale, A. S. (1980). *Elementos de geometría analítica.* Buenos Aires: Nigar.

Tedesco, J. C. (2009). *Educar en la sociedad del conocimiento* (Segunda edición ed.). Buenos Aires: Fondo de cultura económica.

Troutman, J. L. (1996). *Variational calculus with elementary convexity* (Primera edición ed.). New York: Springer-Verlag.

Tversky, B. (1995). Cognitive origins of graphic productions. En F. T. Marchese (Ed.), *Understanding images.* New York: Springer.

Tversky, B. (2001). Spatial schemas in depictions. En M. Gattis (Ed.), *Spatial schmas and abstract thought.* Cambridge, MA: MIT Press.

UNESCO. (2006). *Using ICT to Develop Literacy.* Bangkok: United Nations Educational, Scientific and Cultural Organization.

Vekiri, I. (Septiembre de 2002). What Is the Value of Graphical Displays in Learning? *Educational Psychology Review, 14*(3), 261-311.

Waller, R. (1981). Understanding network diagrams. *Annual Meeting of the American Educational Research Association.* Los Angeles.

Walsh, K. (2006). *Object-Oriented faculty development: training teachers with learning objects.* Recuperado el 10 de septiembre de 2009, de Thesis for the Degree Doctor of Philosophy, pp. 1-114, Capella University: http://www.jstor.org

Wiley, D. A. (2001). *Connecting learning objects to instructional design theory: a definition, a metaphor and a taxonomy.* Recuperado el 8 de Julio de 2009, de The instructional use of learning objects, Association for Educational Communications and Technology: http://www.elearning-reviews.org/topics/technology/learning-objects/2001-wiley-learning-objects-instructional-design-theory/

Winn, W. (1991). Learning from maps and diagrams. *Educational Psychology Review, 3*(3), 211-247.

Zaskis, R., Dubinsky, E., & Dautermann, J. (1996). Coordinating visual and analytic strategies. A study of students' understanding of the group D4. *Journal for Research in Mathematics Education, 27*, 435-457.

---

[1] La definición que de estas tecnologías se utiliza en este trabajo es la ampliamente difundida y casi parejamente aceptada, dada por la UNESCO: The term, *information and communication technologies* (ICT), refers to forms of technology that are used to transmit, store, create, share or exchange information. This broad definition of ICT includes such technologies as: radio, television, video, DVD, telephone (both fixed line and mobile phones), satellite systems, computer and network hardware and software; as well as the equipment and services associated with these technologies, such as videoconferencing and electronic mail. (UNESCO, Using ICT to Develop Literacy, 2006, pág. 14).

[2] GeoGebra - Dynamic Mathematics for Everyone. Copyright 2001-2009 GeoGebra Inc. La aplicación puede descargarse en forma libre del sitio http://www.geogebra.org/, donde se detallan las condiciones de uso. License: You are free to copy, distribute and transmit GeoGebra free of charge for non-commercial purposes). PROJECT DIRECTOR: Markus Hohenwarter (Austria & USA 2001-), LEAD DEVELOPER: Michael Borcherds (UK 2007-), DEVELOPERS: Gabor Ancsin (Hungary 2009-), Mathieu Blossier (France 2008-), Calixte Denizet (France 2010-), Arpad Fekete (Hungary 2010-), Zbynek Konecny (Czech Republic 2010-), Zoltan Kovacs (Hungary 2010-), Yves Kreis (Luxembourg 2005-), Florian Sonner (Germany 2008-), George Sturr (USA 2009-), Hans-Petter Ulven (Norway 2008-).

[3] **Diagonalización de formas cuadráticas**

Se presenta aquí un conjunto de objetos digitales o microaplicaciones interactivas construidas con GeoGebra[3] para la visualización de cónicas que pueden presentarse trasladadas y/o rotadas respecto del sistema de ejes cartesianos originales.

Definición Una forma cuadrática de n variables es una función $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ de la forma $f(x) = x^T A\, x$, donde es una matriz simétrica de $n \times n$. A es la matriz asociada a f .

Las cónicas responden a la ecuación general de segundo grado $ax^2 + 2bxy + cx^2 + dx + ey = k$ o $\boldsymbol{x}^T A \boldsymbol{x} + B\boldsymbol{x} = k$, en su forma matricial, donde

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} c & d \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Para operar con los objetos se deberá guardarlos con otro nombre en el Escritorio o una carpeta personal de trabajo y operar en línea ingresando al sitio http://www.geogebra.org/webstart/4.4/geogebra.html o bien, instalando el software de uso libre en su equipo.

A continuación se presenta una breve síntesis de los conceptos teóricos que sustentan el funcionamiento de estos applets; no obstante es necesario que el usuario lea previamente los contenidos en alguno de los textos incluidos en la bibliografía de la respectiva asignatura o que se indican como referencia en este documento y realice las actividades propuestas para cada objeto digital.

[4] **Algunas definiciones y propiedades relativas a valores y vectores propios de matrices de nxn**

Definición Sea A una matriz de nxn. El escalar λ se denomina *valor propio* de la matriz A si existe un vector no nulo x tal que $Ax = \lambda x.$ Tal vector x se llama *vector propio* de A correspondiente al valor propio $\lambda.$

Los valores propios de una matriz cuadrada A son las raíces del polinomio característico $\mathbf{p}_A(\boldsymbol{\lambda}) = \det(A - \lambda I)$.
El procedimiento para hallar los vectores propios es el siguiente:
1. Determinar las soluciones de la ecuación característica $\det(A - \lambda I) = \mathbf{0}$.
2. Para cada valor propio λ , hallar el subespacio nulo de la matriz $A - \lambda I$. Éste es el autoespacio S_λ, cuyos vectores no nulos son los vectores propios de A , correspondientes al valor propio $\lambda.$
3. Determinar una base para este subespacio.

Definición Se define multiplicidad algebraica de un valor propio como su multiplicidad en cuanto raíz de la ecuación característica $\det(A - \lambda I) = \mathbf{0}$.
Por otra parte, la multiplicidad geométrica de dicho valor propio es la dimensión de su autoespacio asociado.

Los valores propios de una matriz triangular o diagonal son los elementos de su diagonal principal.
La matriz cuadrada A es inversible si y sólo si $\mathbf{0}$ no es valor propio de A .
Sean $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ valores propios distintos de la matriz A , cuyos correspondientes vectores propios son $v_1, v_2, \dots, v_n$. Entonces el conjunto $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ es linealmente independiente.

Definición Sean A y B matrices de $n \times n$. Se dice que A es semejante a B si existe una matriz inversible de $n \times n$ P tal que $P^{-1}A\,P = B$.

Sean A y B matrices semejantes de $n \times n$. Entonces A y B tienen igual determinante, rango, polinomio característico y valores propios. De este modo, A es inversible si y sólo si B lo es.

Definición Sea una matriz A de $n \times n$. Entonces A es diagonalizable si existe una matriz diagonal D tal que A es semejante a D: $P^{-1}A\,P = D$.

Sea una matriz A de $n \times n$. Entonces A es diagonalizable si y sólo si A tiene n vectores propios linealmente independientes. Más precisamente, la matriz diagonal D contiene los valores propios de A en su diagonal principal y la matriz P tiene como columnas a los vectores propios asociados a cada valor propio, en el mismo orden que $D.$
Si la matriz A de $n \times n$ tiene n valores propios distintos, entonces A es diagonalizable.
Sea $A = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$. Los valores propios de A son $\lambda = a \pm i\,b$, y si a y b no son simultáneamente cero, entonces la matriz A se puede factorear como
$A = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & -sen\ \theta \\ sen\ \theta & \cos\theta \end{bmatrix}$, donde $r = |\lambda| = \sqrt{a^2 + b^2}$ y θ es el valor principal del argumento de $a + i\,b$.

Definición Una matriz Q de $n \times n$ cuyas columnas forman un conjunto ortonormal se llama *matriz ortogonal*.

Una matriz Q es ortogonal si y sólo si $Q^{-1} = Q^T$.
Sea una matriz Q de $n \times n$. Entonces las siguientes proposiciones son equivalentes:
a) Q es ortogonal.
b) $\|Qx\| = \|x\|$ para todo $x \in \mathbf{R}^n$.
c) $Qx \cdot Qy = x \cdot y$ para todo x e $y \in \mathbf{R}^n$.

Diagonalización ortogonal de matrices simétricas

Definición Una matriz A de $n \times n$ es diagonalizable ortogonalmente si existe una matriz ortogonal Q y una matriz diagonal D tales que $Q^T A\, Q = D$.

Si A es diagonalizable ortogonalmente, entonces A es simétrica.
Si A es una matriz simétrica real, entonces sus valores propios son reales.
Si A es una matriz simétrica, entonces dos vectores propios cualesquiera, correspondientes a valores propios diferentes son ortogonales.
(Teorema espectral). Sea A una matriz simétrica real de $n \times n$. Entonces A es simétrica si y sólo si es diagonalizable ortogonalmente.

Definición Una forma cuadrática de n variables es una función $f\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ de la forma $f(x) = x^T A\, x$, donde es una matriz simétrica de $n \times n$. A es la matriz asociada a f .

(**Teorema de los ejes principales**). Toda forma cuadrática puede diagonalizarse. Si A es la matriz de $n \times n$ asociada a la forma cuadrática $x^T A\, x$ y si Q es una matriz ortogonal tal que $Q^T A\, Q = D$, entonces el cambio de variable $x = Qy$ transforma la forma cuadrática $x^T A\, x$ en la forma cuadrática $y^T D\, y$, que no contiene términos de producto cruzado. Si los valores propios de A son $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, y $y = [y_1, \dots, y_n]^T$, entonces $x^T A\, x = y^T D\, y = \lambda_1 y_1{}^2 + \cdots + \lambda_n y_n{}^2$.

Definición Una forma cuadrática $f(x) = x^T A\, x$ (y la correspondiente matriz simétrica A) se clasifica de la siguiente manera:
a) definida positiva si $f(x) > 0$ para todo $x \neq \mathbf{0}$.
b) semidefinida positiva si $f(x) \geq 0$ para todo x .
c) definida negativa si $f(x) < 0$ para todo $x \neq \mathbf{0}$.
d) semidefinida negativa si $f(x) \leq 0$ para todo x .
e) indefinida si $f(x)$ toma valores positivos y negativos.

Sea A una matriz simétrica de $n \times n$. La forma cuadrática $f(x) = x^T A\, x$ es
a) definida positiva si y sólo si todos los valores propios de A son positivos.
b) semidefinida positiva si y sólo si todos los valores propios de A son no negativos.
c) definida negativa si y sólo si todos los valores propios de A son negativos.
d) semidefinida negativa si y sólo si todos los valores propios de A son no positivos.
e) indefinida si y sólo si A tiene valores propios positivos y negativos.

Sea $f(x) = x^T A\, x$ una forma cuadrática asociada una matriz simétrica A de $n \times n$. Sean $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$. Entonces las siguientes afirmaciones son verdaderas, sujetas a la restricción $\|x\| = 1$:

a) $\lambda_1 \geq f(x) \geq \lambda_n$

b) El máximo valor de $f(x)$ es λ_1 y se produce cuando x es un vector propio unitario correspondiente al valor propio λ_1 .

c) El mínimo valor de $f(x)$ es λ_n y se produce cuando x es un vector propio unitario correspondiente al valor propio λ_n .

[5] **Referencias**

Hernández, E. (1994). *Álgebra y geometría.* Wilmington, DE: Addison-Wesley/Universidad Autónoma de Madrid.

Kozak, A. M., Pastorelli, S. P., & Vardanega, P. E. (2007). *Nociones de geometría analítica y álgebra lineal.* Buenos Aires: McGraw-Hill/Universidad Tecnológica Nacional.

Lay, D. C. (1999). *Álgebra lineal y sus aplicaciones.* México: Addison Wesley Longman de México.

Poole, D. (2006). *Linear Algebra.* Toronto: Thomson Brooks/Cole.