

ENSEÑAR A LEER Y ESCRIBIR MATEMÁTICA EN INGENIERÍA

Autor: ACERO, Fernando

Dirección electrónica de referencia: facero@fi.uba.ar

Procedencia Institucional: Universidad de Buenos Aires, Facultad de Ingeniería

Eje temático: Curriculum, didácticas y prácticas de la enseñanza

Palabras clave: universidad, lectura, escritura, cálculo

Resumen

Las investigaciones en alfabetización académica afirman que las universidades no pueden presuponer la competencia lectora de los estudiantes que se inician el estudio de una disciplina. El caso de la ingeniería, que utiliza el cálculo vectorial, introduce una brecha entre el lenguaje corriente y el lenguaje técnico todavía mayor. ¿Cómo ayudar a salvarla? Este trabajo presenta los principios de diseño de sendos talleres para desarrollar habilidades de lectura y escritura en la Facultad de Ingeniería de la Universidad de Buenos Aires. ENTORNO CONCEPTUAL. El AMT (*Advanced Mathematical Thinking*) permite caracterizar la abstracción presentada a través de diferentes registros semióticos en la prosa matemática que compone los textos. METODOLOGÍA. Se identifican y analizan las peculiaridades del lenguaje del cálculo según se presentan en los libros de texto mediante las técnicas propias del análisis de contenido, derivándose de allí sus dificultades de acceso y expresión. Se seleccionan los tópicos del cálculo que mejor manifiestan su singularidad en cuanto a demandas lectoras. RESULTADOS. Los principios de diseño conducen a una implementación de los talleres sobre un entorno virtual (moodle). La plataforma educativa está ordenada por temas y contiene el material textual con el que trabajan los profesores a cargo de los talleres. Se ha completado el diseño de un taller de lectura y un taller de escritura que se encuentra disponible en la plataforma educativa de la Facultad. Los resultados de la implementación de las versiones presenciales del taller de lectura se encuentran en la etapa de análisis.

1. Introducción

Leer y escribir son habilidades sin las cuales los estudios universitarios resultarían impensables. Esta afirmación es independiente tanto de la disciplina como de las épocas. Sin embargo, la intervención institucional de las universidades en la propagación o desarrollo de esas habilidades ha sido muy desigual según los tiempos. Puede contraponerse la situación actual con la imperante en los orígenes de la institución universitaria, la más antigua después de la Iglesia.

Los estudios universitarios se hallan sumergidos en una tradición que utiliza intensivamente los libros de texto desde sus mismos orígenes medievales; de hecho, son las universidades del siglo XIII las que introducen una nueva forma de organizar las bibliotecas¹ (Petrucci, 1999; Petrucci, 2011), las que originan un incipiente mercado del libro de texto universitario (Díez-Borque, 1995, págs. 44-46, 60; Vignaux, 1999, págs. 66, 72; Labarre, 2002, págs. 40-43; Dahl, 2003, pág. 74; Tagle, 2007, págs. 129-130), ya que la enseñanza fue perdiendo poco a poco el carácter oral y público, ganando las prácticas de la glosa, discusión y comentario de los textos (Colla, 2010, pág. 175; Le Goff, 1996, pág. 87; Pedersen, 2000, págs. 128-132; Nava Rodríguez, 1992, pág. 195). Los libros son por entonces vistos como instrumentos propios del oficio del intelectual y pueden considerarse relativamente estables ante las variaciones de especialización temática y de localización: “se presenta en el siglo XIII una verdadera revolución en los ámbitos del libro, además de un fuerte incremento en la cantidad misma, que tienen a la universidad como centro, cuando no taller mismo” (Acero, 2011e, pág. 12)². Los estudiantes ingresaban a muy corta edad y debe considerarse que en la universidad –en realidad sus colegios auxiliares– la enseñanza comenzaba por el alfabeto. La enseñanza de la escritura era en realidad, un método de enseñanza en sí mismo con objetivos que no difieren demasiado de los que hoy podrían proponerse: “el entrenamiento para escribir, la práctica de la composición, y al mismo tiempo la introducción de las mentes en la conciencia de nuevos conceptos y razonamientos y sus medios de expresión” (McLuhhan, 1993, pág. 150)³.

El rol de la universidad, su intervención efectiva tanto en la producción de los textos escritos por sus estudiantes como en sus mismas lecturas es actualmente muy diferente; de hecho, la corriente de investigación de la *alfabetización académica* subraya cierta prescindencia de las instituciones, podría decirse un desentendimiento de la posible conveniencia de incorporar a sus prácticas tareas directamente vinculadas con la lectura y escritura académica. El panorama puede

ser resumido en pocas palabras: las lecturas son responsabilidad de los estudiantes, y sus productos escritos son juzgados en las instancias de evaluación⁴.

Esta situación contiene al menos dos presunciones: el estudiante sabrá leer los textos propios del área de conocimiento en el que se encuentra, y además sabrá organizar un escrito sujeto a las normas y convenciones propias del género académico y específicas de la disciplina, de manera de comunicarle al lector-profesor su solvencia en la argumentación y aplicación de sus conocimientos. De semejantes suposiciones estaban muy alejados los maestros medievales, y lo que se subraya es que no hay actualmente indicios que permitan suponerlas, sino más bien lo contrario. Hacia la década de 1960 ya se caracterizaba la incipiente transición de la cultura de la imprenta a la *cultura electrónica* como una ruptura que iniciaba una nueva era: vivimos una nueva era para la que el significado de la cultura de la imprenta se está haciendo tan extraño como el significado de la cultura del manuscrito lo fue para el siglo XVIII” (McLuhhan, 1993, pág. 150); cinco décadas después, la observación a aumentado su fuerza. Los rasgos propios de los que McLuhan llamaba era electrónica no han hecho sino volverse más nítidos en la era de internet. En el actual contexto de la sociedad del conocimiento y con la introducción de las tecnologías de la información y el consecuente descentramiento del eje letrado, las conjeturas acerca del futuro de libro van desde su extinción hasta su eternidad, pasando por cierto grado de convivencia con los formatos digitales (Eco, 2006, pág. 156; Cano, 2010, págs. 83-102). La lectura, hoy multidimensional y con mayor libertad de escoger distintos itinerarios, supone una creciente exigencia cognitiva, para poder poner en contexto la multiplicidad de la información que debe procesar. Una condición necesaria –e insuficiente– para la *alfabetización digital* es la *alfabetización en la lectura y escritura*⁵, dado que uno de los usos más intensivos del ordenador como manipulador de símbolos (no icónicos) no es sino una técnica de escritura; el ordenador como manipulador de percepciones no tiene posibilidad de sustituir una alfabetización en la lectura, no resultando entonces eficaces como sustitutos de los libros de texto (Littau, 2008, págs. 94-95; Busaniche, 1997, pág. 52; Palamidessi, Galarza, Schneider, & Landau, 2006, págs. 92-94).

Los supuestos acerca de las competencias lectoras –y escritoras– de las que estarían dotados los alumnos que ingresan a la universidad no son, de manera alguna, sostenidos por las investigaciones de la última década. Se conjetura, sin

embargo, que parte de la ilusión de la capacidad lectora proviene de que, de un modo u otro, todos necesitan leer y escribir en su cotidiano mundo digitalizado: “Con internet hemos vuelto a la era alfabética. Si alguna vez pensamos que habíamos entrado en la civilización de las imágenes, pues bien, el ordenador nos ha vuelto a introducir en la galaxia Gutenberg⁶ y todos se ven de nuevo obligados a leer” (Eco & Carrière, 2010, pág. 20). El reingreso forzoso, –e intensificado– en la era alfabética como lo describe Umberto Eco es complementado por una nueva cualidad en las formas de lectura, ya que el alfabeto mismo es el que ha sido alterado, tal como añade Jean-Claude Carrière: “nunca hemos tenido más necesidad de leer y escribir que en nuestros días. No podemos siquiera usar un ordenador si no sabemos leer y escribir. Y, además, de una forma más compleja que antaño, porque hemos integrado nuevos símbolos, nuevas claves. Nuestro alfabeto se ha ampliado. Resulta cada vez más difícil aprender a leer” (Eco & Carrière, 2010, pág. 23). Los textos son omnipresentes, “el mundo de la era electrónica es un mundo de sobreabundancia textual, cuya oferta desborda la capacidad de apropiación de los lectores” (Chartier R. , 2005a, pág. 203)⁷.

Con ser estas observaciones generales válidas, no son, sin embargo, una autorización suficiente para la prescindencia de las universidades en materia de lectura y escritura. El fenómeno de la lectura en la era de internet está atravesado por la doble condición: se lee y escribe *más*, a la vez que se lee y escribe *distinto*. A lo que cabría añadir que *lo que se lee* y lo que se escribe es de distinta naturaleza. Siendo verdad que la escritura es parte de la cultura de internet, es falso que eso baste para presuponer competencias lectoras de cualquier material textual, en cualquier formato y en cualquier contexto; la capacidad de leer algo no es equivalente a la capacidad de leerlo todo. Si bien no hay un impedimento insalvable para la lectura de textos corrientes, los textos específicos tienen sus propios códigos de acceso; la frase “ya nadie impide la lectura, a no ser los mismos textos” (Poulain, 2004, pág. 49) pone el foco en la naturaleza del texto mismo y alerta de que no ha un texto sino diversos textos, cada uno de ellos con sus propias demandas de competencias lectoras. La misma autora vuelve la atención a los formatos cuando observa que “el nuevo espectro que acosará a las sociedades modernas es el del no lector, incluso el del iletrado⁸, que se transforma a comienzos del siglo XXI en el anticipo de otro personaje importante: el lector de escritos sumergidos en una masa de pantallas tan volátiles como insípidas” (*Ibidem*, pág. 17). Las lecturas en esas

mismas pantallas exigen de una técnica que se aleja mucho de la requerida para leer un libro en el formato tradicional, y se asemeja más a la utilizada antes de la aparición del *codex*⁹. El iletrismo es un fenómeno que también se predica de una disciplina específica, como el de la matemática, para lo que basta tomar en cuenta los resultados de PISA, que define la alfabetización matemática como la capacidad de un individuo para identificar y comprender el rol que la matemática juega en el mundo, haciendo estimaciones justificadas que le permitan utilizar la matemática para tomar decisiones simples basadas en algún cálculo en su vida cotidiana (PISA, 2006, pág. 12).

Si es verdad que el mundo electrónico está impregnado de una densa textualidad, presenta a la vez una escisión con los modos tradicionales de lectura y escritura que transitan el aprendizaje y la evaluación en las universidades, y los autores han señalado al menos tres dimensiones de esa brecha. “Así, en cuanto al orden de los discursos, el mundo electrónico provoca una triple ruptura: propone una nueva técnica de difusión de la escritura, incita a una nueva relación con los textos e impone a éstos una nueva forma de inscripción” (Chartier R. , 2005a, pág. 207). El lector del mundo electrónico debe moverse con estrategias de lectura que difieren sustancialmente de las que utiliza el lector tradicional. El mismo autor puntualiza las diferencias remarcando que “la originalidad y la importancia de la revolución digital estriba en que obliga al lector contemporáneo a abandonar todas las herencias que le han dado forma, ya que el mundo electrónico ya no utiliza la imprenta, ignora el ‘libro unitario’ y es ajeno a la materialidad del *codex*” (*Ibidem*, págs. 207-208). Los textos en el mundo digital se multiplican, pero la rapidez con la que es preciso procesarlos está varios órdenes por encima de la lentitud que reclama la lectura de un libro de texto de nivel universitario. Lo que ha dado en llamarse *lectura instantánea* estaría avanzando por sobre la lectura profunda: “la lectura instantánea podría a corto plazo ocupar la totalidad del tiempo de quien quisiera leer todos los mensajes de su correo electrónico” (Chartier A.-M. , 2004, pág. 196). No solo los tiempos dedicados a lecturas instantáneas son ampliados, sino que también las estrategias de lectura concentrada en niveles profundos son inútiles para ese tipo de lecturas, pues “la cantidad de textos intercambiados se vuelve exponencial y, en consecuencia, el tiempo empleado en la lectura se incrementa (y llegado el caso, en escribir la respuesta). Así pues, se vuelven cada vez más necesarias las estrategias

de clasificación, de tiempos de respuesta, de no lectura e incluso de olvido” (Chartier A.-M. , 2004, pág. 196).

Si bien las universidades incorporan paulatinamente elementos propios de las tecnologías digitales, no pueden al mismo tiempo incorporar las transformaciones radicales implicadas en la cultura digital. Una prueba directa de este hecho se obtiene examinando la composición de las bibliografías que las instituciones incorporan al *curriculum* de las asignaturas, donde precisamente se encuentran los tres rasgos que Chartier lista como recesivos en el mundo de internet: por lo general, y en su mayoría, los listados son ‘*libros unitarios*’ salidos de una *imprensa* con el formato del viejo *códice*. La expresión ‘libro unitario’, que podría también expresarse como el ‘libro de autor’ alude al surgimiento en las postrimerías de la Edad Media (siglos XIV-XV) de un manuscrito en lengua vulgar compuesto por obras de un mismo autor que no fuese una autoridad canónica eclesiástica o filosófica. El formato, por supuesto, era el *códice* de hojas reunidas en una encuadernación que sustituyera (siglos II-IV) a los *volumina* –rollos– propios de la Antigüedad. La fusión de estas dos revoluciones con la de la imprenta dan los rasgos al libro tal como se conoce hoy en el formato tradicional (Chartier R. , 2005a, págs. 205-206; Chartier & Cavallo, 2004, págs. 18-19)¹⁰. En la lectura frente a la pantalla, por el contrario, “todas las entidades textuales son como bancos de datos que procuran fragmentos cuya lectura no supone de ninguna manera la comprensión o percepción de las obras en su identidad singular” (Chartier & Cavallo, 2004, pág. 19).

El desempeño de un lector entre pantallas, exige también la integración de registros no textuales; entre éstos, los más frecuentes son las imágenes, que de auxiliares de un discurso pueden pasar a ser su elemento principal; el aforismo medieval *pictura est laicorum literatura* que refería a las prácticas de *escripción*¹¹ (Petrucci, 2003, pág. 42) accesibles a la lectura de los analfabetos (Chartier R. , 2005b; Colla, 2010; Chartier & Cavallo, 2004; Vignaux, 1999; Lyons, 2012) es trasladado por Eco a la multitud de iconos creados para la navegación, cuya profusión bien podría crear una suerte de “*analfabetismo di ritorno*” (Eco, 2006, pág. 173)¹².

El formato del libro de texto tradicional supone prácticas de lectura que se encuentran muy alejadas, según estas consideraciones, de las que son fomentadas por las intensas prácticas de lectura y escritura en la red. Sin necesariamente convalidar la posición que se dado en llamar *determinismo tecnológico*¹³, pueden resumirse algunos de los rasgos que contribuyen a desplegar ese distanciamiento.

“En el pasado fui un buzo en un mar de palabras. Ahora me deslizo por la superficie como un tipo en una moto acuática” (Carr, 2011, pág. 19), es una frase que pretende sintetizar la diferencia entre dos tipos de lectura en la contraposición: profunda–superficial. Un libro universitario reclama un elevado nivel de intimidad y concentración (Steiner, 2007, pág. 64) que no sería propio de estudiantes del siglo XXI que “ya no tendrían el reflejo espontáneo de leer y les sería dificultoso hacerlo en soledad” (Chartier A.-M. , 2004, pág. 110)¹⁴. Leer textos universitarios en general, y de la especie de los matemáticos en particular “significaba practicar un proceso antinatural de pensamiento que existía atención sostenida, ininterrumpida, a un solo objeto estático” (Carr, 2011, pág. 84) que resulta todavía menos ‘natural’ si se lo compara con las prácticas habituales para navegar el hipertexto, que requieren más bien habilidades de búsqueda y selección de fragmentos de información ya no en un texto unitario sino en una masa de textos cuya única conexión resulta del itinerario seguido por el navegante en la superficie de ese mar textual; “la lectura frente a la pantalla es generalmente una lectura discontinua, que busca, a partir de palabras claves o de rúbricas temáticas, el fragmento textual del cual quiere apoderarse [...] sin que necesariamente sea percibida la totalidad textual que contiene este elemento” (Chartier R. , 2005a, pág. 207)¹⁵.

Un rasgo añadido al de la fragmentación del texto es la fragmentación de las tareas mismas, conocido como *multitarea*¹⁶; las conclusiones de estudios con estudiantes de la Universidad de Stanford refieren que “Las personas habituales de la multitarea creen que son buenas haciendo varias cosas a la vez, pero el estudio les contradice, son peores en cada una de las áreas cognitivas necesarias para la multitarea” (Somoza Rodríguez, 2012, pág. 587)¹⁷. La pérdida de rendimiento debido a la multitarea es potenciada por lo que se ha llamado la *sobrecarga cognitiva* que supone para un navegante la constante necesidad de enfocar la atención sobre los sucesivos trozos de información que se van sucediendo a medida que atraviesa el hipertexto; en efecto, se observa “la existencia de una correlación muy estrecha entre el número de vínculos y la desorientación por sobrecarga cognitiva [...] La lectura y la comprensión exigen el establecimiento de relaciones entre conceptos, hacer inferencias, activar conocimientos previos y sintetizar ideas fundamentales. La desorientación por sobrecarga cognitiva puede interferir con las actividades cognoscitivas de la lectura y escritura (Carr, 2011, pág. 159). La multitarea es ubicada entre las características esenciales de la *generación multimedia*, a la que

pertenecen los adolescentes del principio del siglo XXI: “los jóvenes de hoy miran televisión, escuchan música, hablan por celular y navegan por internet... todo al mismo tiempo” (Morduchowicz, 2008, pág. 12).

La desorientación por la transición de la cultura del manuscrito a la de la imprenta es comparada con la actual: “como nuestros antepasados de la Baja Edad Media, hoy nos encontramos entre dos mundos tecnológicos. Después de 550 años, la imprenta y sus productos se están viendo desplazados del centro de nuestra vida intelectual hacia sus márgenes” (Carr, 2011, pág. 19). Pero, aunque se acepte la realidad de ese desplazamiento hacia los márgenes, debe decirse que su magnitud no es pareja; por ejemplo, los libros de texto no están en los márgenes de las bibliografías universitarias, ni están en los márgenes de las investigaciones que siguen concediendo un lugar central al libro de texto. Se sigue que este diferencial de desplazamientos introduce una gran dificultad a que el estudiante pueda aprender de los textos leyéndolos y, todavía mayor, dar cuenta de sus aprendizajes escribiendo.

Los libros también son expulsados a los márgenes mediante ciertas concepciones unilaterales de la lectura que pueden ser corrientes en la escuela media, entre las que se encuentra la fórmula *busquen en internet* al limitar las búsquedas a un solo formato, “deja fuera el mundo de los libros, los textos impresos, con las dificultades que ello conlleva. Es cada vez más frecuente que, habituados a las búsquedas virtuales, chicos y jóvenes desestimen o desconozcan saberes vinculados a la lectura en enciclopedias o libros impresos: cómo buscar información en un índice, cómo manejarse con un listado de bibliografía, con la referencias que aparecen en los prólogos, entre otras, que suponen aprendizajes necesarios para un lector” (Cano, 2010, pág. 111). Si el texto en internet puede considerarse como una gigantesca base de datos, y se acepta que en sus navegaciones en pantalla los lectores “más que el acto de lectura, los internautas retoman de clic en clic su papel de telespectadores con control remoto, cambiando de canal, según sus gustos (o su aburrimiento)” (Chartier A.-M. , 2004, pág. 200), se sigue que es muy difícil que ese mismo internauta conciba el libro de texto como un todo organizado con el material cuidadosamente dispuesto según un orden lógico, con dispositivos propios de navegación y convenciones específicas para distinguir las funciones de los distintos segmentos de prosa.

En este panorama general y con estas condiciones contextuales, ignorar el problema de la lectura de libros de texto en el nivel universitario equivale a descargar sobre los estudiantes que ingresan la responsabilidad de resolverlo. La actividad de leer implica procesos entre los que se menciona la recuperación de información previa, la formulación de hipótesis sobre lo que se va a leer, la adjudicación de sentido de modo dinámico con el avance de la lectura (Narvaja de Arnoux, Di Stefano, & Pereira, 2009, pág. 8). Sólo un desarrollo de estas capacidades permite, a su vez, la producción de documentos escritos por los mismos alumnos, en la medida en que aprender a escribir, en el ambiente universitario, está implícito en el aprender a leer (Fernández Bravo & Torres, 2003, págs. 143-146).¹⁸ “Millones de graduados universitarios con un nivel de ingresos superior al promedio de la población no son grandes lectores [...] El problema del libro no está en los millones de pobres que apenas saben leer y escribir, sino en los millones de universitarios que no quieren leer” (Zaid, 2010, pág. 55). El sujeto colectivo de la afirmación “Para algunas personas, la idea de leer un libro se ha vuelto algo anticuada, incluso tonta” (Carr, 2011, pág. 21) incluye una gran porción de graduados universitarios de todos los niveles¹⁹. Este trabajo muestra un intento institucional para reducir la magnitud del conjunto de validez de la afirmación.

2. Referentes teórico-conceptuales

La dificultad del libro texto para los estudiantes que se inician en la vida universitaria se ve, en parte, como una consecuencia del múltiple cuadro descrito en la introducción. La lectura de textos por alumnos que carecen del conocimiento específico de sus contenidos altamente organizados, y sin estar en posesión de las categorías de pensamiento que son estructuradas por la disciplina misma, producirían en el lector una sensación de desorientación tal que le conduce a una desconexión del texto, al carecer de un repertorio de decodificadores que le permitan recorrerlo (Haswell, y otros, 1999, págs. 12-13; Carlino & Estienne, 2004, págs. 170-171; Poulain, 2004, pág. 21). Desde sus mismos orígenes la corriente cognitiva del AMT (*Advanced Mathematical Thinking*) ha dirigido su atención a los libros de texto (Tall, 1994; Tall & Katz, 2011; Tall, 1991b; Tall, y otros, 2001a) como objetos portadores de concepciones acerca de cómo los alumnos aprenden. El salto que la abstracción implica en estos niveles, dice uno de los teóricos del AMT

(*Advanced Mathematical Thinking*) “se convierte con frecuencia para la mayoría de los estudiantes en los primeros cursos de la universidad en un abismo por el que se precipitan” (Eisenberg 1991, 149). El AMT permite caracterizar la abstracción presentada a través de diferentes registros semióticos en la prosa²⁰. Se trabaja particularmente la dimensión del lenguaje, cuya centralidad en los textos matemáticos es suficientemente reconocida²¹. Entre las características esenciales del lenguaje matemático se anota su elevada compresión en expresiones concisas de enorme densidad de contenidos significativos dando origen al concepto de *lexical density*²². El lenguaje matemático conduce a definiciones donde los conceptos quedan cristalizados como objetos sólidos, constituyendo “una soberbia sistematización de la matemática, pero cognitivamente conflictiva con el desarrollo de los procesos matemáticos que conducen a los objetos matemáticos a través del proceso de compresión llamado encapsulado” (Tall, 1994, pág. 8)²³.

Lo que está en juego en ese proceso es la naturaleza de la abstracción, que en la matemática es del tipo denominado *abstracción teórica* para distinguirlo del correspondiente a la *abstracción empírica*. El proceso de abstracción empírica es ejemplificado por Kant en un pasaje de su Lógica: “veo un abeto, un sauce, y un tilo [...] si reflexiono únicamente en lo que tienen de común entre sí [...] y hago abstracción de su tamaño, de su figura, etc., obtengo el concepto de árbol” (2010, pág. 131). Si bien el proceso parece describir con naturalidad el modo en que se alcanza el concepto de árbol, Russell advierte que no cabe esperar que tales adquisiciones se alcancen sin un considerable esfuerzo “Debe de haberse tardado largo tiempo en descubrir que una pareja de faisanes y un par de días eran dos ejemplos del número 2; el grado de abstracción que ello implica no es fácil de adquirir” (1988, pág. 12). En este sentido, nada hay de esencialmente diferente entre el concepto simbolizado por “2” y el que se representa con el término “árbol”, y uno y otro podría entonces quedar condensado en una definición, que retendría lo que ha quedado de ese proceso de abstracción²⁴. El lenguaje corriente mismo es un vehículo de abstracción, desde que sus sustantivos son en sí abstracciones que actúan como etiquetas de clases de objetos antes que de individuos: “nombres como silla, copa o esponja no se refieren a objetos específicos sino una clase de objetos” (Mason & Johnston-Wilder, 2004, pág. 132)²⁵. En la concepción platónica el término *abstracción* es más difuso, lo abstraído no procede de la realidad sino que tiene más consistencia que la realidad misma: al mundo de la matemática solamente

se accede por el pensamiento, punto de partida de la disciplina de apartarse del mundo sensible y mudable hasta alcanzar los objetos estables de la matemática. La experiencia puede ser la ocasión que permite acceder a esa realidad más profunda mediante un proceso de ascenso que no consiste en la reunión de rasgos comunes recogidos de un sustrato de percepciones. La abstracción kantiana, por su parte, es presentada como uno de los tres momentos en la formación de conceptos a partir de las representaciones: (a) comparación [*komparation*], (b) reflexión [*reflexion*], (c) abstracción [*abstraktion*] o separación [*absonderung*]. La abstracción es siempre una separación de algo, por lo que “no tenemos que decir: abstraer algo (*abstrahere aliquid*) sino abstraer de algo (*abstrahere ab aliquo*)” (Kant, 2010, pág. 131). Los tres momentos de Kant intentan dar cuenta de cómo se alcanza la abstracción a partir de los datos de la experiencia²⁶. En el lenguaje de las clases, Skemp concibe la abstracción desarrollándose en dos momentos que exigen distinguir entre la abstracción como acción y la abstracción como efecto de esa acción (efecto que llama ‘concepto’)²⁷. “La abstracción es una actividad mediante la cual advertimos semejanzas... en nuestras experiencias. Clasificar significa agrupar nuestras experiencias sobre la base de esas semejanzas” (Mitchelmore & White, 2007, p. 3).

Se ha propuesto llamar a la abstracción así entendida como “abstracción empírica”, en tanto se encuentra “basada en la experiencia”. Es sabido que en las concepciones que asumen la experiencia como fuente del conocimiento abstracto, se reconocen diferencias en la asignación del peso concedido a la intervención del sujeto para organizar esas percepciones. La abstracción empírica presupone dos cosas: por un lado, la existencia de objetos que se dan en una realidad con multiplicidad innumerable que es el material de base de la abstracción; por el otro, la capacidad del sujeto de seleccionar de esta infinita variedad de existencias particulares algunos rasgos que son comunes a ciertos grupos de ella. En la abstracción empírica “El concepto abstracto captura lo que hay de esencial en las cosas y deja todo lo particular de lado, en él no hay mezcla alguna de elementos disímiles” (Peláez Cedrés, 2008, pág. 108).

Si los conceptos matemáticos se derivaran de características comunes seleccionadas de un conjunto de casos, lo que debiera hacerse es permitir que los alumnos tengan ese material desde el cual ‘levantar’ la abstracción que se pretende. Si, en cambio, se les presenta la abstracción ya condensada en una definición, los conceptos resultarán pobremente comprendidos, fácilmente olvidados y difícilmente

aplicables. La recomendación, desde esta perspectiva, alienta la presentación de una variedad de casos en un contexto relevante que conceda a los alumnos la posibilidad de reconocer semejanzas en esa diversidad de contextos, objetivarlas en un concepto y presentar nuevas situaciones donde la aplicación del concepto permita resolver problemas de una manera eficiente. Las investigaciones de experiencias en clase de este sistema, en matemática elemental “son prometedoras, pero revelan grandes inconvenientes de implementación” (Mitchelmore & White, 2007, pág. 4). Trasladado a los libros de texto de la matemática avanzada, el autor tendría que considerar posponer la definición del concepto hasta haber presentado diversas aproximaciones a la abstracción que se pretende introducir: los problemas de implementación de un texto de estas características se vinculan de manera evidente con la extensión requerida para lograrlo, sin certezas de que el lector siga allí cuando finalmente llega la definición. Suponiendo que no haya una imposibilidad radical, surgen problemas prácticos: ¿cuántos contextos se precisarían hasta que un alumno pudiese descubrir esa noción entre los pliegues de la información que se le presenta?

Una de las contribuciones que ha tenido mayor impacto en la caracterización de la abstracción en las ciencias, y en particular de las ciencias matemáticas, proviene de Ernst Cassirer y está contenida en dos textos clásicos publicados en la primera mitad del siglo XX (Cassirer, 1953; Cassirer, 1950). Cassirer comienza por cuestionar la abstracción empírica presentada en el apartado anterior, que entiende ligada a la concepción aristotélica de sustancia. En efecto, dada una colección cualquiera de objetos, lo que de ellos se puede seleccionar como propiedades comunes es prácticamente innumerable, y por lo tanto no está garantizada la posibilidad de escoger aquellas propiedades –y solamente aquellas– que caracterizan y determinan la estructura completa de los individuos que componen esa colección. La garantía de lograrlo provendría solamente de la concepción aristotélica del concepto como sustancia de las cosas, lo que Cassirer denomina el concepto empírico, o *concepto-cosa*. En la abstracción empírica, los conceptos matemáticos son situados en misma clase de los conceptos empíricos, de modo que no cabría distinguir entre la naturaleza del concepto de árbol, o de gato, obtenido por la selección de propiedades comunes a distintos ejemplares, y el concepto de cuadrilátero obtenido por selección de los rasgos comunes a rectángulos, cuadrados, rombos, trapecios... “los conceptos de la ciencia exacta matemática no

se hallan en el mismo nivel que los de las ciencias descriptivas, que solo tratan de una superficial clasificación de objetos dados” (Cassirer, 1953, pág. 5). La inadecuación de la perspectiva de la abstracción empírica se pone de manifiesto en conceptos como derivada funcional, convergencia de series, para los que no hay una manera evidente de imaginarlos como una selección de propiedades comunes a una colección de objetos: “los conceptos de punto, o de línea, o de superficie, no pueden ser obtenidos como una parte de cuerpos físicos presentes y separados de ellos por simple ‘abstracción’ [empírica]” (12). Antes que la neutralidad de la abstracción empírica, que deja intactos los objetos sobre los que abstrae, la abstracción matemática responde a otra naturaleza, ya que “surgen a través de una definición genética estableciendo una conexión *constructiva*, a diferencia de los conceptos empíricos que pretenden meramente copiar ciertas características de un conjunto dado” (12, las bastardillas pertenecen al original). El punto aquí esencial es que los conceptos matemáticos establecidos por las definiciones genéticas no se reducen a delimitar propiedades de objetos dados, sino que crean nuevas realidades con las que, a su vez, es posible operar. La abstracción empírica podría aceptarse como una conjetura acerca del surgimiento del *concepto-cosa*, pero no alcanza para dar cuenta de aquellos conceptos matemáticos que Cassirer denomina “*concepto-relación*”²⁸. Es esta noción del concepto-relación, o para decirlo en otros términos, de la naturaleza funcional (en el sentido matemático del término función), el cambio de perspectiva que, por así decirlo, descarga ahora el peso de la generación del concepto no ya en la serie de cosas *dadas* de las que se extrae una propiedad común, como sucede en la abstracción empírica, sino que se piensa que el concepto es más bien una regla que constituye, eventualmente, la conexión entre objetos. Los objetos, ahora, no son sino lo que es instituido por la regla que los define, dando “una *regla* universal para la conexión de los particulares mismos” (Cassirer, 1953, pág. 20).

Lo que la literatura actual entiende por abstracción teórica se desarrolla en una línea que acepta la crítica de Cassirer a la pretensión de la abstracción empírica: “en esencia, la abstracción teórica consiste en la creación de conceptos para ajustar en una teoría” (Mitchelmore & White, 2007, pág. 4). Si la abstracción empírica puede dar cuenta de lo que Vygotsky denomina los ‘conceptos cotidianos o empíricos’, no alcanza para explicar los que el mismo psicólogo llama ‘conceptos científicos’. Una característica esencial del concepto científico, y que lo equipara con el concepto-

relación, es su pertenencia a una estructura de relaciones en las que los objetos solo adquieren sus significados en tanto verifican esas relaciones; el concepto teórico, en oposición al empírico, no encuentra una semejanza entre cosas de una colección dada, sino que establece una conexión entre cosas que podrían resultar muy disímiles, siendo esa conexión la que informa en qué consiste el concepto²⁹. En ocasiones, también se utiliza el lenguaje de ‘concepto elemental’ y ‘concepto teórico’ (sin olvidar que ambos son teóricos) introducido por Davydov, que insiste en la diferencia cualitativa de la abstracción que concibe uno y otro: “El conocimiento científico no es una simple extensión, intensificación y expansión de la experiencia cotidiana de la gente. Requiere de una particular forma de abstraer, analizar y generalizar [...] después de la abstracción teórica un objeto es mentalmente remplazado por otro” (Davydov, 1990, citado por Mitchelmore & White, 2007, p.4). Cualquiera que sea el tipo de abstracción que haya conducido a un concepto, cristalizado en una definición y nombrado con una palabra o símbolo, como por ejemplo ‘derivada’ o ‘distancia’, debe diferenciarse entre el significado objetivo, estático, del término y la dimensión dinámica del proceso por el que es adquirido. También Vygotsky señala con claridad que las abstracciones no se adquieren de modo completo, sino más bien por sucesivas aproximaciones. Tanto en el lenguaje cotidiano como en el científico, la incorporación de una abstracción al vocabulario es solo el inicio de un proceso que evoluciona a través de sucesivas transformaciones hasta estabilizarse en torno de un significado más o menos compartido por el resto de la comunidad hablante o científica a la que el término pertenece (Vygotski, 1994; Vygotski, 2006). Los ajustes entre esos significados se harían operativos en distintos niveles de abstracción. Como el lenguaje en el nivel de abstracción teórica necesita una taquigrafía de símbolos eficientes para no multiplicar en demasía el volumen del discurso, se ha señalado que la profusión de símbolos operada en las últimas cuatro centurias ha podido inducir visiones extremas en las que “la matemática es vista más como un lenguaje que un campo de conocimiento” (Vergnaud, 2011, pág. 7)³⁰. Un lector encontrará diversos grados de dificultad en avanzar a lo largo del texto según la profusión del simbolismo, la forma de construir las pruebas, el estilo impersonal de escritura (por el que el lector es alejado y sólo invitado a ejecutar acciones como *resolver*, *analizar*, *determinar*...), el modo de combinar registros simbólicos con representaciones gráficas, el diseño mismo de los espacios. Para la concepción de que la matemática coincide con su lenguaje, y en particular con el

puramente simbólico de naturaleza abstracta, las palabras del lenguaje corriente no serían necesarias y podrían estar ausentes del texto, como lo muestra la figura 1 (*Principia Mathematica*)³¹.

Figura 1. Un fragmento de texto matemático desprovisto del lenguaje natural

<p>*35·13. $\vdash . (\alpha \uparrow R) \dot{\wedge} (\beta \uparrow S) = (\alpha \cap \beta) \uparrow (R \dot{\wedge} S)$ <i>Dem.</i> $\vdash . *23\cdot33 . \supset \vdash : x \{ (\alpha \uparrow R) \dot{\wedge} (\beta \uparrow S) \} y . \equiv . x (\alpha \uparrow R) y . x (\beta \uparrow S) y .$ [*35·1] $\equiv . x \in \alpha . x R y . x \in \beta . x S y .$ [*22·33.*23·33] $\equiv . x \in (\alpha \cap \beta) . x (R \dot{\wedge} S) y .$</p>	<p>Ausencia total de lenguaje natural</p>
---	--

Fuente: (Whitehead & Russell, 1910a, pág. 281)

Desde esta perspectiva, los textos de matemática se separan radicalmente de cualquier otro precisamente en la universalidad de su comunicación a través de los distintos idiomas nacionales. Un texto como el de la figura 1 quedaría invariante en cualquiera de sus ‘traducciones a los idiomas locales, ya que nada hay para traducir en ese lenguaje. La figura 2 pone más en evidencia este hecho, al mostrar el núcleo simbólico como invariante de traducción entre lenguas que ni siquiera comparten un alfabeto³². Desde ciertas posturas teóricas también se sostiene la invariancia de la matemática a través del eje temporal, posición en donde se sitúa la afirmación de Layzer citada en Morgan (2002, pág. 13): “Nunca podremos comprender las obras de Eurípides del modo que sonaba a su audiencia original, pero los *Elementos* de Euclides nos hablan a nosotros tan claramente como a sus contemporáneos”³³.

Figura 2. Dos fragmentos del mismo texto donde se observa la parte invariante a la traducción

<p>بإمكاننا أن نكتب $p = \frac{m}{n}$ حيث n و m عددين صحيحين ليسا زوجيين بنفس الوقت. لنفترض أن هذا قد حدث. عندها فإن المعادلة (١) تدل ضمنا على أن $m^2 = 2n^2 ,$ (٢) que se satisface: podremos escribir $p = m/n$, donde m y n son enteros y además podremos elegirlos de modo que los dos no sean pares. Supongamos que lo hemos hecho; entonces (1) implica que $m^2 = 2n^2 ,$ (2)</p>

Fuente: un texto clásico de análisis matemático (Rudin, 1980, pág. 2)

A las dificultades propias de las abstracciones propias de los contenidos matemáticos en sí, se superponen las que encuentran los alumnos en distinguir las diferentes funciones cumplidas por las secciones de los textos, el status de las representaciones gráficas (tablas, figuras, diagramas, sistemas de coordenadas), con sus variantes funcionales o decorativas.

Históricamente, en las ocasiones en que la escritura ha sido un deliberado propósito de la enseñanza en las instituciones de educación superior, el énfasis se ha puesto en los escritos de los estudiantes como producto. Se esperaba que los estudiantes adquirieran prácticas de buena escritura mediante la lectura de textos modelos de lograda escritura. Hacia la década de 1970 surge la atención hacia la escritura como proceso. Actualmente, se piensa la escritura académica como una práctica social especializada que se desarrolla en un ámbito reducido con diferentes niveles de localización y que debe aprenderse como parte de la apropiación de las disciplinas que se expresan mediante ellas. En esta perspectiva teórica se propone el diseño de espacios que permitan revelar al alumno el poder epistemológico de la escritura en el lenguaje académico, concebido ya no como sistema de signos organizados en una gramática, sino también –y en especial– como recurso eficaz para adquirir la habilidad de manipular significados (Coffin, y otros, 2013)³⁴. El principiante en el área de la matemática avanzada mira el lenguaje técnico menos como ayuda que como obstáculo: “la mayoría de los estudiantes no son competentes en la utilización del lenguaje matemático. Muchos no comprenden que los términos técnicos no son arbitrarias combinaciones de sílabas para complicarles la vida” (Schwartzman, 2013, pág. viii). Resulta también necesario trabajar sobre el vocabulario mismo, dado que se encuentra aceptado que la riqueza y volumen del vocabulario está directamente relacionado con la competencia lectora, y todavía más fuertemente con la escritura³⁵. La escritura desde esta perspectiva no es principalmente un canal de comunicación de un mensaje, sino más bien es el medio por el que el mensaje mismo está siendo formado. La fuente del vocabulario que ha de usarse con cierta eficiencia en la escritura proviene fundamentalmente de las lecturas³⁶. Además del lenguaje matemático, se tiene ciertamente la singularidad de sus objetos que, “hablando aproximadamente, no están ubicados en el espacio ni en el tiempo y no intervienen en relaciones causales” (Parsons, 2008, pág. 1). La centralidad del tipo de objeto es tal que para algunos autores determina la ciencia misma: “la matemática podría describirse como la ciencia de los objetos abstractos como números reales, funciones, superficies, estructuras algebraicas y cosas así...” (Barwise, 1999, pág. 6).

Los investigadores precisan que no es lo mismo ayudar a los estudiantes con sus textos de matemática que enseñarles a leer. Lo primero es más bien a incentivar las mejores estrategias para tratar con los problemas que supone la lectura de textos de

elevada densidad conceptual; “La densidad conceptual de la matemática y las ciencias naturales se encuentra entre las principales causas de las dificultades de los estudiantes” (Barton, Heidema, & Jordan, 2002, pág. 25)³⁷. Los modelos que esa ayuda adopta dependen del foco en las diversas funciones de la escritura académica y las estrategias pedagógicas pueden variar entre las propias de un curso basado en instrucción experta hasta el modelo más horizontal que caracteriza los talleres. Se plantean tres modelos según que el foco se encuentre en el texto mismo (discurso académico), en el estudiante que escribe (discurso individual), o el discurso de la comunidad de conocimiento específico (discurso académico). Combinando esos focos se encuentran diversos modos legítimos de enseñanza, algunos de los cuales son las tutorías individuales, enseñanza de géneros o de tipos de texto, discusión y revisión entre pares, grupos organizados de realimentación, cursos específicos por disciplina, cursos de instrucción basados en la escritura (Björk, Bräuer, Rienecker, & Jörgensen, 2013, págs. 9-10)³⁸.

El panorama trazado en la introducción supone que el diseño de ayudas a la lectura y escritura además del aspecto matemático debe tener en cuenta aspectos generales no directamente vinculados a la disciplina, dado que “un considerable número de estudiante llega a la universidad sin las habilidades básicas necesarias para llevar a cabo su carrera [...] pobreza de vocabulario, impreciso lenguaje, mala sintaxis, incapacidad para construir oraciones bien formadas, dificultades para reconocer la estructura de un argumento” (Martin, Knights, Vicent, Palastanga, & Stuart, 2013, pág. viii)³⁹.

3. Aspectos metodológicos

La primera experiencia de introducción de modo explícito de una acción institucionalizada que reconoce la conveniencia de ofrecer recursos al servicio del aprendizaje de la lectura y escritura en la Facultad de Ingeniería de la Universidad de Buenos Aires se origina en el Departamento de Matemática, en el seno de la asignatura Análisis Matemático II, que se encuentra en el recorrido curricular de todos los estudiantes de las distintas carreras de ingeniería⁴⁰. Mediante los métodos propios del *análisis de contenido* (Neuendorf, 2012, págs. 9-20; Krippendorff, 1990, págs. 18-23; Weber, 2012, págs. 8-12; Leray, 2008, págs. 5-11) se identifican las

nociones esenciales de la asignatura que maximizan las oportunidades de brindar efectivos aportes a las actividades de los estudiantes.

Entre los posibles formatos disponibles para materializar las acciones pedagógicas, se piensa en el propio del *taller* que permite tanto una distribución horizontal de las actividades, como una cierta porosidad en los diversos momentos, destrezas y temas que se entrecruzan en cada encuentro. Se considera consistente con la situación planteada en la introducción que el desarrollo de los encuentros se maneje con cierta flexibilidad entre las modalidades que, en los términos del entorno conceptual, se denominan ‘modelos basados en expertos’ y ‘modelos basados en la integración’ (Björk, Bräuer, Rienecker, & Jörgensen, 2013, pág. 11). Tanto el taller de lectura como el taller de escritura se ofrecen como opciones destinadas a una audiencia abierta que incluye tanto a los alumnos de la facultad como a los que cursan el Ciclo Básico Común de la Universidad de Buenos Aires, como acción tendiente a favorecer la articulación entre niveles. El diseño de los correspondientes entornos virtuales y sus contenidos fue responsabilidad del autor de este trabajo y materializado en la plataforma digital de la Facultad de Ingeniería de la Universidad de Buenos Aires⁴¹.

4. Resultados alcanzados y/o esperados

En esta sección se presenta y discute el resultado no de los talleres en sí, sino el contenido y su organización en las plataformas que sirvieron de guion para su desarrollo, mostrando los modos en que estos entornos pretenden cumplir las condiciones de contorno presentadas en el apartado introductorio y conforme a las precisiones derivadas del apartado teórico.

El entorno de Moodle⁴², proporcionando el espacio que aloja recursos educativos, permite además la organización a esos recursos con una flexibilidad que se alinea con los objetivos de los talleres. La flexibilidad, entendida aquí como las diversas maneras que la misma plataforma habilita distintos itinerarios dentro de la plataforma misma y hacia sus enlaces externos, ha hecho posible diseñar el entorno con una audiencia amplia, que es el primer aspecto de la flexibilidad: está dirigida tanto a los profesores a cargo del taller como a sus estudiantes. La asignación del rol de editores a todos los profesores permite que ellos mismos decidan los contenidos que serán visibles y la secuencia en la que irán disponiéndolos⁴³. De esta manera, los

recursos que se disponen en la plataforma pueden ser divididos según que su destinatario principal sean los profesores o los alumnos. Los recursos para los profesores contienen gran parte de los fundamentos teóricos del taller, las nociones esenciales y objetivos pretendidos que permiten una comunidad de ideas acerca de las actividades y los modos de desarrollarlas consistentes con esos propósitos.

Debido a estas características, las plataformas quedan organizadas en el formato denominado por *temas*, que posibilita la necesaria flexibilidad de usos⁴⁴. Entre ambos talleres se crean 40 *temas*, entendidos como bloques que pueden contener recursos en sí mismos, remitir a otros recursos, sugerir actividades o invitar a acciones de colaboración tanto virtuales como reales.

Existe una segunda división en la construcción de los *temas*, según que esté esencialmente dispuesto para el desarrollo de un encuentro o que los trascienda, en duración y oportunidad de reflexión. Conforme a lo establecido en los lineamientos teóricos, los talleres de lectura y escritura están pegados a la disciplina, por lo que los *temas* que están especialmente diseñados para el desarrollo de cada uno de los encuentros del taller tienen un eje en un concepto especial de la asignatura (por ejemplo, el concepto de *función*), o en un estilo de prosa matemática específico (por ejemplo, el género *ejercicio*). En cambio, otros *temas* tienen un alcance transversal y son introducidos por los docentes a lo largo del taller, según las dinámicas particulares que se presentan con las diferentes ediciones⁴⁵.

Figura 3. Fragmento de un *Tema* transversal inserto en el taller de escritura

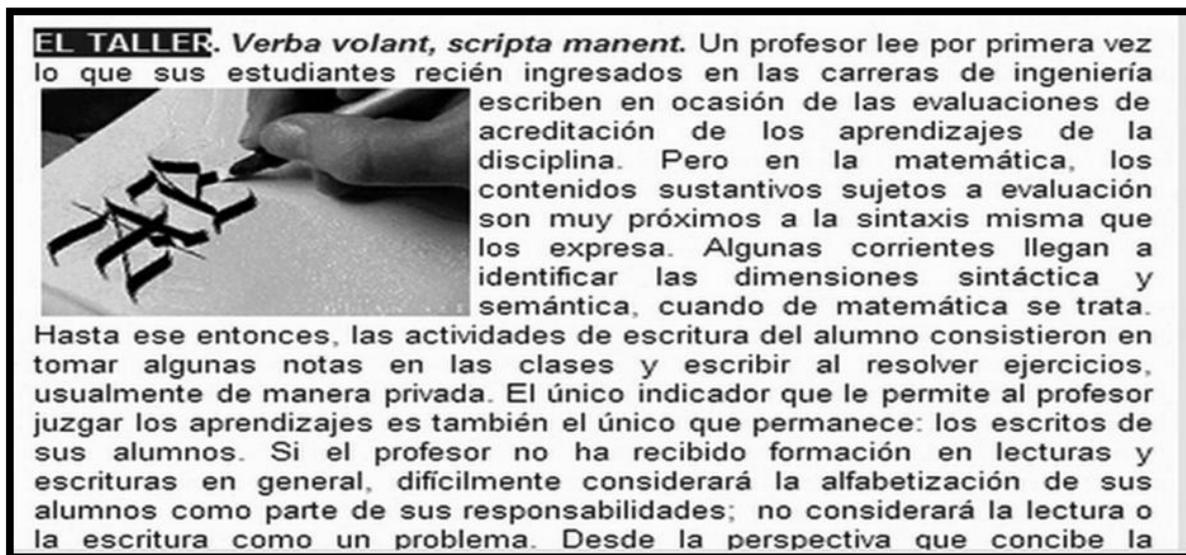


Fuente: elaboración propia

El fragmento de un *tema* transversal que se reproduce en la figura 3, titulado *Así no* es un ejemplo de las cuestiones que se desarrollan *a lo largo* del taller, y que no son

tratadas de modo exclusivo en uno u otro encuentro. Los profesores del taller utilizan estos *temas* transversales introduciéndolos por lo general a partir de algunas situaciones surgidas en los encuentros; en el caso de la figura, la claridad y la sencillez de un escrito es una de esas nociones que solo adquiere sentido cuando se refiere a la disciplina específica, mientras que su opuesto, bien caracterizado por la caricatura de Calvin, es aplicable a cualquier campo. Lo que se entienda por claridad y sencillez en el *cálculo* y algunos medios que favorecen esa cualidad a la que se tiende de modo iterativo en sucesivos borradores hasta cristalizarse en un texto, las consecuencias prácticas que de ello resultan para el aprendiz... son discusiones promovidas por el *tema* en el interior del taller. En otros casos, el *tema* responde más a un contexto de justificación interna de las mismas actividades del taller, y se dirigen más a los formadores mismos que a los estudiantes, como es el caso que se muestra en la figura 4. El fragmento reproducido alcanza a mostrar una reflexión acerca de la percepción, posiblemente bastante corriente, de la pertinencia de un curso de escritura de matemática en la universidad.

Figura 4. Fragmento de un *tema* que presenta una justificación interna del taller de escritura

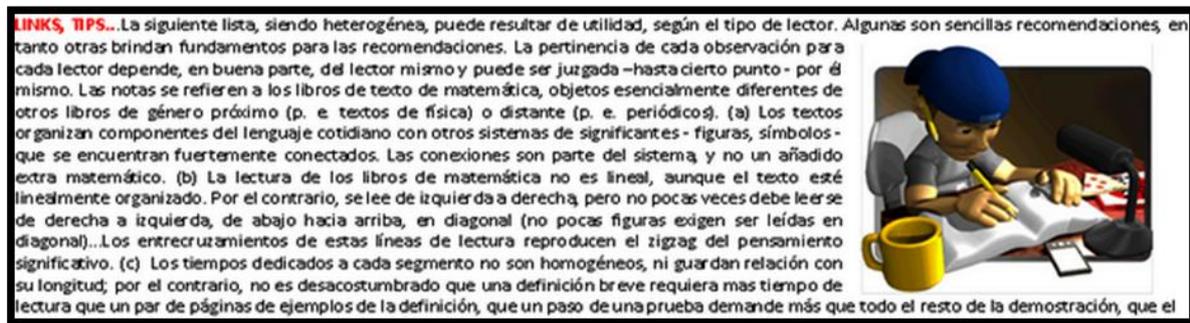


Fuente: elaboración propia

Muy diferentes son los *temas* dirigidos específicamente a los estudiantes, como podría ser el denominado *Links, Tips* que se reproduce en la figura 5 y que al final (no visible en el fragmento reproducido) lista un conjunto de sitios en la red que están específicamente orientados a proporcionar, en un estilo que va entre lo reflexivo y prescriptivo, algunos consejos destinados a mejorar las prácticas de lectura y de escritura. Tanto las sugerencias como el listado de links son un conjunto

bastante extenso que requieren de la administración adecuada de los docentes, para no generar lo que en los fundamentos teóricos se denominó *sobrecarga cognitiva*⁴⁶, cuyos efectos son precisamente los opuestos de los que pretende el taller: la desconexión del texto por la desorientación ante el volumen de información⁴⁷.

Figura 5. Fragmento de un *tema* que ofrece vínculos y sugerencias para el taller de lectura



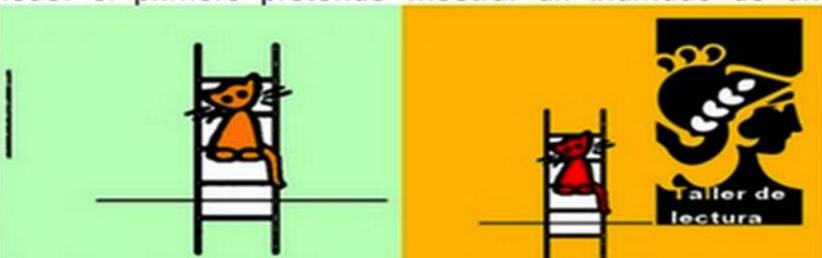
Fuente: elaboración propia

Una de las dimensiones trabajadas especialmente por el taller e incorporada al bloque de la figura 5 es el del alineamiento del tipo de lectura con la naturaleza del texto que se está leyendo. Se anota allí que los libros de texto pueden expresar las cosas de muchas maneras cuando se escucha la voz del autor, pero inevitablemente ingresan en el lenguaje matemático en los tramos en que se habla ya no de lo que el autor pretende comunicar al lector, sino de los objetos y sus relaciones en términos estrictamente matemáticos. Inmersos en esos tramos, el lenguaje matemático tiene una característica que lo distingue esencialmente del lenguaje ordinario, y que se sabe causa enormes dificultades al estudiante (de esto hay pruebas suficientes, sin importar que resulte paradójico): es su precisión. La ausencia de estos presupuestos, la necesidad de explicitarlo todo junto a sus cadenas de conexiones, en lugar de ser fuente de claridad, amedrenta al lector novicio. El mecanismo por el que se producen malentendidos en la lectura –y que debe evitarse– parece seguir este camino: dado que el discurso ordinario solo avanza cuando el lector puede descubrir algunos supuestos implícitos y no manifiestos, el lector transfiere ese hábito a la lectura del texto matemático; dado que en ese texto no hay, en verdad supuestos no explicitados, el lector termina por inventarse algunos que le dan un sentido para él, y que es del todo ajeno a la matemática. De aquí resulta la recomendación de respetar el texto, sin añadir (¡y sin quitar!) material diverso al del discurso propio; respetar el texto es avenirse a sus convenciones propias, que son extremadamente visibles.

Los *temas* también se organizan alrededor de ciertos géneros de prosa matemática (Bagchi & Wells, 1998a, págs. 15-27; Bagchi & Wells, 1998b, págs. 116-136; Gopen G. , 2010, págs. 27-29). Uno de los que más interés despiertan son los ejercicios, dado que suelen ser el medio más corriente de evaluar los aprendizajes. La distinción entre ejemplos, ejercicios y problemas, no siempre hecha en la literatura, es incorporada como tema específico en uno de los encuentros, como lo muestra el fragmento del sexto encuentro del taller de escritura reproducido en la figura 6. Manteniendo el estilo uniforme con el resto de los temas, el de los ejercicios incluye una ilustración de un fragmento tomado de un texto, que en este caso responde a la intención del bloque; se trata de un ejercicio que puede ser abordado con diversas estrategias, desde las propias de la geometría sintética pasando por las de la geometría analítica y llegando a las del *cálculo* mismo. Los docentes orientan o proponen diversas aproximaciones según los grupos de trabajo.

Figura 6. Fragmento de un *tema* que trabaja el género de ejercicio y discute géneros próximos

Clase 6. Ejemplos, ejercicios y problemas son géneros próximos con diferencias específicas: el primero pretende mostrar un individuo de una clase, el segundo desarrollar la capacidad de reconocer qué reglas son relevantes para un caso, el tercero movilizar conocimientos que sólo pueden aplicarse tras algunas decisiones que convergen en el cerramiento de un modelo matemático de la situación. Por supuesto, según los conocimientos previos, lo que para uno es un problema, bien puede resultar para otro un ejercicio. El gatito de la figura [Gutenmacher, V. & Vasilyev, N., 2004. *Lines*



0.1. A ladder standing on a smooth floor against a wall slides down onto the floor. Along what curve does a cat sitting in the middle of the ladder move?
 Let us suppose our cat is calm and sits quietly. Then we can see that behind this picturesque formulation is the following mathematical problem.

Fuente: elaboración propia

Si bien la flexibilidad es reclamada por la estructura de taller y necesaria para el tratamiento de estrategias o cuestiones transversales, los encuentros se encuentran enhebrados por el hilo de las nociones esenciales del área del *cálculo*. Así, por ejemplo, en lo que respecta al taller de lectura, se seleccionan ocho núcleos temáticos fuertes, uno por cada encuentro: funciones, Integrales, Límite y continuidad, derivada, extremos, ejercicios y problemas, curvas, superficies.

Puede tomarse como testigo el caso de la noción de curvas, donde se promueven actividades de lectura de varios libros de texto, tanto dentro de la bibliografía propuesta en la asignatura, como de libros de texto utilizados en otras instituciones, no necesariamente de la Argentina. La plataforma actúa aquí tanto orientando la discusión como brindando los recursos y los ejes sobre los que se establece esa discusión. Los libros de texto que se utilizan se suponen disponibles en el espacio presencial; este espacio es ensanchado en la virtualidad de una serie de vínculos direccionados hacia fragmentos de textos especialmente trabajados para su utilización en el taller. En el caso de las curvas la lista completa comprende, entre unos y otros, unos veinte textos, una multitud adecuada para apreciar las diferentes soluciones que los autores dan al mismo problema de presentar un objeto matemático denominado *curva*, y cómo esas soluciones influyen sobre las lecturas que pretenden apropiarse del concepto.

Figura 7. El fragmento del *tema* en el que se trabajan las presentaciones de la noción de *curva*

Clase 7. La noción de curva parece muy cercana a la intuición, y sin embargo es -ha sido en la historia- muy escurridiza. La lectura de los textos debe hacerse, por otra parte, con extremo cuidado de qué objeto se está definiendo. Por último, los nombres no se han estabilizado en los libros, de modo que dos (muy buenos) textos pueden denominar curva a distintos objetos. La abstracción debe esforzarse hasta un nivel muy sutil para preservar la idea informal de una línea "sin espesor". Sin ese cuidado aparecen "monstruitos" como curvas continuas que llenan todos los puntos de un cuadrado como la de la figura (Hairer, E., & Wanner, G. (1996). *Analysis by its History* (Primera ed.). New York: Springer-Verlag) que muestra el proceso de construcción de la curva de Hilbert (1891). Es un muy buen ejercicio de lectura tomar más de un texto y analizar en qué difieren (esencialmente, se entiende) las correspondientes definiciones de curva entre sí.

Fuente: elaboración propia

En la figura 7, que es un fragmento del *tema* de *curva*, se ha señalado en el zócalo la propuesta de actividad a la que remite la pequeña introducción, que incluye el tratamiento del logotipo de la Facultad de Ingeniería con las mismas técnicas con las que son tratadas las imágenes en un libro de texto para mostrar la generación de la curva de Peano-Hilbert, la figura 8 el fragmento de un reenvío de la figura 7, y que permite trabajar en la noción de curva presentada por un texto clásico.

Figura 8. Fragmento de un texto al que remite uno de los vínculos del *tema* de la figura 7

**§ 72. VECTOR DEPENDIENTE DE UNO O MÁS PARÁMETROS:
CURVAS Y SUPERFICIES**

1. Función vectorial. — *a)* Dado como *campo de variación de un parámetro* un conjunto de números reales u , constituido generalmente por un intervalo abierto $(a, b) : a < u < b$, o por un intervalo cerrado $[a, b] : a \leq u \leq b$, hagamos corresponder a cada uno de sus *escalares* u un valor bien determinado del vector \mathbf{r} , definiendo así la *función vectorial uniforme de escalar* (cfr. § 60-1) :

$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u).$

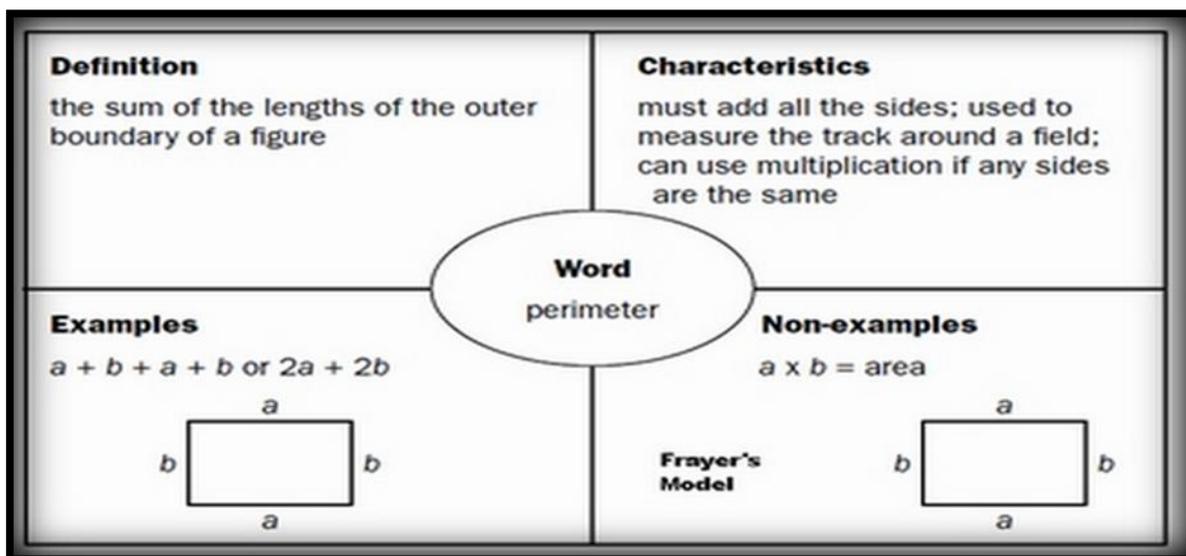
Rey Pastor T2

[72-1]

Fuente: (Rey Pastor, Pi Calleja, & Trejo, 1968, pág. 239)

En algunos temas específicos los talleres pretenden contar con los elementos escritos que permitan al autor-estudiante recibir una inmediata realimentación de sus ejercicios de escritura. Cuando la realimentación está a cargo de sus propios pares, el propósito es poner de manifiesto la dimensión del lenguaje como comunicación, con el estudiante como emisor de un mensaje que debe estar escrito en un código medianamente reconocible y descifrable por el estudiante-lector que lo recibe en el otro extremo del canal. Pero también interesa una realimentación del aspecto semántico que concierne a la disciplina misma, en cuyo caso los escritos son diseñados para ser dirigidos a los mismos docentes, que pueden pronunciarse en algo más que el aspecto comunicacional. En esas ocasiones, siendo los primeros ejercicios de escritura, se les proporciona a los participantes de algún instrumento que les ayude a organizar la información y les permita una rápida comparación de sus propósitos con los efectivos resultados alcanzados.

Figura 9. Instrumento para la organización de una definición (modelo de Frayer)



Fuente: (Brummer & Kartchner Clark, 2008, pág. 26)

La figura 9 muestra un ejemplo de esos instrumentos a los que se accede desde la plataforma, aplicado a la noción de perímetro abordado desde el nivel elemental. Se alienta a la construcción de esquemas similares con nociones centrales en la asignatura, como podría ser el concepto de *función*. Las habilidades de escritura y los conocimientos del concepto no son las mismas en cada uno de los cuadrantes, permitiendo así cubrir la mayor cantidad de dimensiones presentadas en el marco teórico de este trabajo. Por ejemplo, el tipo de abstracción necesario para llenar el cuadrante inferior izquierdo trabaja la capacidad de juzgar si un caso pertenece a la regla, mientras que en el ángulo superior derecho se tiene la posibilidad de explicar con un lenguaje informal algunas propiedades, sea o no exclusivas, del objeto en sí, o del objeto para el que lo describe. Estrictamente hablando, solo el cuadrante superior izquierdo es matemático, mientras que el resto es metamatemática; la distinción le resulta de utilidad al que escribe el esquema, pues le permite también aplicarla a sus lecturas, utilizando las introducciones y el lenguaje informal para alcanzar aproximaciones al nuevo concepto que puedan ser conciliadas o enfrentadas con los conocimientos previos⁴⁸.

La implementación de una organización en un entorno virtual que permite la administración de los talleres cumple satisfactoriamente los requisitos planteados por el cuadro de situación presentado en el apartado inicial y genera una malla flexible de estrategias que potencialmente puede cubrir el rango de habilidades que propone desarrollar entre los participantes. No se ha realizado, al momento de este trabajo, una estimación de la medida en que los espacios así dispuestos contribuye a la reducción de la brecha entre los lectores potenciales y los textos que se les proponen. En cualquier caso, puede suponerse que permite al estudiante una apreciación de que la lectura y escritura de matemática es una actividad que requiere una dedicación y un tiempo por encima de los otros textos, y que concedérselo presagia grandes recompensas, ya que “si, efectivamente, a través de la palabra podemos progresar en el conocimiento, es porque la palabra no es mero símbolo o formalización de contenidos” (Lledó, 1970, pág. 42).

Si la lectura y la escritura del material disciplinar es contemplado como un problema del estudiante, dado el panorama contextual de la introducción, se convierte en una pauta de exclusión implícita en el propio *currículum*. Si, por el contrario, se considera como un contenido curricular de las asignaturas, se sigue la necesidad de que las

instituciones universitarias dispongan recursos destinados a atenuar esa reconocida dificultad. Estos talleres tal vez no resulten suficientes, pero las evidencias recogidas los presentan como necesarios. Si se acepta, como se delinea en el marco conceptual, que la educación es imposible sin una comunicación lingüística, y a la vez que “todo lenguaje es pues, educativo, formativa o deformativamente” (Lledó, 1970, pág. 81), la necesidad se deriva de inmediato: las evidentes distancias entre los estudiantes y los medios que les sirven para serlo deben reducirse al mínimo.

5. Bibliografía

Acero, F. (2011e). Libros, textos y lecturas en la universidad medieval. *XXII encuentro del estado de la investigación educativa. El hacer de la investigación educativa* (págs. 1-22). Córdoba: Universidad Católica de Córdoba .Facultad de Educación.

Altbach, P. (2009). *Educación Superior Comparada* (Primera ed.). (A. Ruiz, Trad.) Buenos Aires: Universidad de Palermo.

Aman, H., & Escher, J. (2008). *Analysis II* (Primera ed.). (S. Levy, & M. Cargo, Trads.) Berlín: Birkhäuser.

Amann, H., & Escher, J. (2005). *Anaysis I* (Primera ed.). (G. Brookfield, Trad.) Berlín: Birkhäuser.

Anglin, W. (1994). *Mathematics: A Concise History and Philosophy* (Primera edición ed.). New York: Springer.

Anton, H. (1994). *Introducción al Álgebra Lineal* (Tercera ed.). (J. Hernández Pérez Castellanos, Trad.) México D.F.: Limusa.

Anton, H. (2005). *Elementary Linear Algebra* (Novena ed.). New York: Wiley & Sons.

Anton, H., Bivens, I., & Davis, S. (2012). *Calculus. Early Trascendentals. 10th Edition* (Décima ed.). New York: Wiley and Sons.

Apostol, T. (1967). *Calculus volume I. One-Variable Calculus, with an introduction to linear algebra* (Segunda edición ed., Vol. I). New York: John Wiley & Sons.

Apostol, T. (1980). *Calculus volumen 2. Cálculo con funciones de varias variables y álgebra lineal, con aplicaciones a las ecuaciones diferenciales y a las probabilidades* (Segunda edición en castellano [Original: Calculus II, Multi-variable calculus and linear algebra. with applications to differential equations and probabily] ed., Vol. II). (F. Vélez Cantarell, Trad.) Barcelona: Reverté.

Apostol, T. (1981). *Mathematical Analysis* (Segunda edición ed.). Massachusetts: Addison-Wesley.

Aristóteles. (1967a). *Psicología. Tratado del alma* (Primera edición ed.). Buenos Aires: Bibliográfica omeba.

Aristóteles. (1967c). *Últimos Analíticos* (Primera edición ed.). Buenos Aires: Omeba.

Bachelard, G. (1987). *Étude sur l'évolution d'un problème de physique. La propagation thermique dans les solides*. Paris: Vrin.

Bagchi, A., & Wells, C. (1998a). *On the communication of mathematical reasoning. Problems, Resources and Sigues in Matemáticas Undergraduate Studies*. Recuperado el 14 de julio de 2009, de PRIMUS, Vol. 8, pp. 15-27.: <http://www.dean.usma.edu/math/resource/pubs>

Bagchi, A., & Wells, C. (1998b). *Varietes of mathematical prose*. Recuperado el 15 de julio de 2009, de Problems, Resources and Sigues in Matemáticas Undergraduate Studies (PRIMUS), Vol. 8, pp. 116-137: <http://www.case.edu/artsci/math/wells/pub/pdf/mathrite.pdf>

Bagchi, A., & Wells, C. (1998b). *Varietes of mathematical prose*. Recuperado el 18 de agosto de 2009, de Problems, Resources and Issues in Mathematics Undergraduate. Vol. 8 (1998), pp. 116-136.: <http://www.case.edu/artsci/math/wells/pub/pdf/mathrite.pdf>

Baños Sancho, J. (2007). *La plataforma educativa moodle. Creación de aulas virtuales* (Segunda edición ed.). Madrid: les Satafi.

Barton, M. L., Heidema, C., & Jordan, D. (November de 2002). Teaching Reading in Mathematics and Science. *Association for Supervision and Curriculum Development. Reading and Writing in the Content Areas*, 60(3), 24-28.

Barwise, J. (1999). *Handbook of Mathematical Logic* (Octava edición ed.). Amsterdam: Elsevier.

Björk, L., Bräuer, G., Rienecker, L., & Jörgensen, P. S. (2013). *Teaching Academic Writing in European Higher Education* (Segunda edición ed.). Dordrecht: Kluwer.

Blackwell, J., & Martin, J. (2011). *A Scientific Approach to Scientific Writing* (Primera edición ed.). New York: Springer.

Borges, J. L. (1999). *Obras Completas III. 1975-1985* (Primera edición ed., Vol. III). San Pablo: Emecé Editores.

Bourbaki, N. (1976). La arquitectura de las matemáticas. En F. Le Lionnais (comp.), *Las grandes corrientes del pensamiento matemático* (N. Míguez, & L. Santaló, Trads., Tercera edición ed., págs. 26-49). Buenos Aires: Eudeba.

Bourbaki, N. (2007). *Éléments D'Histoire des Matématiques* (Segunda ed.). Berlín: Springer.

- Bourdieu, P., & Passeron, J. C. (1998). *La Reproducción. Elementos para una teoría del sistema de enseñanza*. (Tercera edición ed.). México D. F.: Fontamara.
- Boyer, C. B., & Merszbach, U. (1989). *A history of mathematics* (Segunda edición ed.). Republic of Singapore: John Wiley & Sons.
- Brummer, T., & Kartchner Clark, S. (2008). *Writing Strategies for Mathematics* (Primera edición ed.). Huntington Beach (USA): Shell Education.
- Busaniche, B. (1997). Alfabetización digital: las fronteras del aprendizaje y el control de la información. En R. Cabello, & D. Levis, *Medios informáticos en la educación a principios del siglo XXI* (Primera edición ed., págs. 51-60). Buenos Aires: Prometeo.
- Cano, F. (2010). Leer y escribir con las nuevas tecnologías. En A. Brito (dir.), F. Cano, A. M. Finocchio, & M. d. Gaspar, *Lectura, escritura y educación* (Primera edición ed., págs. 83-120). Rosario: Homo Sapiens.
- Canuto, C., & Tabacco, A. (2005). *Analisi matematica I. Teoria ed esercizi con complementi in rete. 2a edizione* (Segunda edición ed.). Milano: Springer.
- Canuto, C., & Tabacco, A. (2008). *Analisi matematica II. Teoria ed esercizi con complementi in rete* (Primera edición ed.). Milano: Springer.
- Cardinale, L. (2007). La lectura y escritura en la universidad. Aportes para la reflexión desde la pedagogía crítica. *Pilquen Año VI I I • Nº 3, 2006/2007, VIII(3)*, 1-5.
- Carlino, P. (Enero-febrero-marzo de 2003). Alfabetización académica: un cambio necesario, algunas alternativas posibles. *Educere. Investigación*, 6(20), 409-420.
- Carlino, P. (2004). *El proceso de escritura académica: cuatro dificultades de la enseñanza universitaria*. Recuperado el 14 de octubre de 2009, de Educere, Revista venezolana de educación 8(26), 321-327. Universidad de Los Andes, Mérida, Venezuela: <http://saber.ula.ve/bitstream/123456789/19901/2/articulo4.pdf>
- Carlino, P. (2009). *Escribir, leer y aprender en la universidad. Una introducción a la alfabetización académica*. (Primera edición, cuarta reimpresión ed.). Buenos Aires: Fondo de cultura económica.
- Carlino, P., & Estienne, V. (2004). ¿Pueden los universitarios leer solos? Un estudio exploratorio. *Memorias de las XI Jornadas de Investigación en Psicología* (págs. 169-173). Buenos Aires: Facultad de Psicología de la Universidad de Buenos Aires.

- Carr, N. (2008). *The Big Switch. Rewiring the World, From Edison to Google* (Primera edición ed.). New York: W. W. Norton & Company.
- Carr, N. (2011). *Superficiales. ¿Qué está haciendo Internet con nuestras mentes?* (Segunda edición ed.). (P. Cifuentes, Trad.) Buenos Aires: Taurus.
- Carr, N. (2013). *The Shallows. What the Internet Is Doing to Our Brains* (Segunda edición ed.). New York: W. W. Norton & Company.
- Cassirer, E. (1950). *The Problem of Knowledge. Philosophy, Science and History since Hegel* (Primera ed.). (W. Woglom, & C. Hendel, Trans.) New York: Yale University Press.
- Cassirer, E. (1953). *Substance and Function. And Einstein's Theory of Relativity* (Vigésima ed.). (W. Curtis Swabey, & M. Collins Sabey, Trans.) Chicago: Dover.
- Chartier, A.-M. (2004). La memoria y el olvido, o cómo leen los jóvenes profesores. En B. Lahire, *Sociología de la lectura* (H. García, Trad., Primera edición ed., págs. 109-138). Barcelona: Gedisa.
- Chartier, A.-M. (2005). *Enseñar a leer y escribir. Una aproximación histórica* (Primera ed.). (D. Sánchez, Trad.) México D. F.: Fondo de Cultura Económica.
- Chartier, R. (1999). Las revoluciones de la lectura: siglos XV-XX. *Revista de Humanidades: Tecnológico Monterrey*, 1(007), 91-110.
- Chartier, R. (2000). La historia. Entre representación y construcción. *Prismas. Anuario de historia intelectual*, 11(2), 1-18.
- Chartier, R. (2005a). *El presente del pasado. Escritura de la Historia, Historia de lo Escrito* (Primera edición ed.). (M. Cinta, Trad.) México, D.F.: Universidad Iberoamericana.
- Chartier, R. (2005b). *El orden de los libros. Lectores, autores, bibliotecas en Europa entre los siglos XIV y XVIII* (Tercera edición [Original 1992, L'ordre des livres. Lecteurs, auteurs, bibliothèques en Europe entre XIV et XVII siècle] ed.). (V. Ackerman, Trad.) Barcelona: Gedisa.
- Chartier, R. (2006). *Inscribir y borrar. Cultura escrita y literatura (siglos XI-XVIII)* (Primera edición [Original 2005, Inscrivere et effacer] ed.). (V. Goldstein, Trad.) Buenos Aires: Katz.

- Chartier, R. (2007). *La historia o la lectura del tiempo* (Primera edición ed.). (M. Garita Polo, Trad.) Barcelona: Gedisa.
- Chartier, R., & Cavallo, G. (2004). *Historia de la lectura en el mundo occidental*. (Segunda ed.). Madrid: Tauros.
- Coffin, C., Curry, M. J., Goodman, S., Hewings, A., Lillis, T., & Swann, J. (2013). *Teaching Academic Writing. A toolkit for higher education* (Segunda edición ed.). London: Routledge.
- Colla, F. (2010). *Escribas, monjes, filólogos, ordenadores...La preservación de la memoria escrita en Occidente* (Primera edición ed.). Córdoba. Argentina: Alción.
- Cortázar, J. (26 de julio de 2013). Las clases magistrales de Julio Cortázar. *La Nación. adn cultura*, págs. 4-8.
- Courant, R., & John, F. (1974). *Introduction to Calculus and Analysis. Volume two* (Primera edición ed., Vol. II). New York: Wiley & Sons.
- Courant, R., & John, F. (1999b). *Introducción al Cálculo y al Análisis Matemático. Vol. 2* (Novena edición ed., Vol. II). (H. Pérez Castellanos, Trad.) México D. F.: Limusa.
- Cucuzza (dir.), H., & Spregelburd (codir.), R. (2012). *Historia de la Lectura en la Argentina. Del catecismo colonial a las netbooks estatales* (Primera edición ed.). Buenos Aires: Editoras del Calderón.
- Curtis, P. (1979). *Cálculo de varias variables con álgebra lineal* (Primera edición, primera reimpresión [Original 1968, Multivariate Calculus with Linear Algebra] ed.). (M. C. Sangines de Salinas, Trad.) México D.F.: Limusa.
- Dahl, S. (2003). *Historia del libro* (Primera edición, tercera reimpresión [Original 1972, Bogens historie] ed.). (A. Adell, Trad.) Madrid: Alianza.
- Day, R. (2013). *How to Write and Publish a Scientific Paper* (Séptima edición ed.). Phoenix: Oryx Press.
- Dieudonné, J. (1980). *Calcul Infinitésimal* (Segunda ed.). Paris: Hermann.
- Dieudonné, J. (1982). *A Panorama of Pure Mathematics As Seen by N. Bourbaki* (Primera ed.). (I. Macdonald, Trad.) New York: Academic Press.
- Díez-Borque, J. M. (1995). *El libro. De la tradición oral a la cultura impresa* (Segunda edición ed.). Barcelona: Montesinos.

- Eco, U. (1999). *Kant y el ornitorrinco* (Primera edición [Original 1997, Kant e l'ornitorrinco] ed.). (L. Lozano Miralles, Trad.) Barcelona: Lumen.
- Eco, U. (2006). *La bustina di Minerva* (Tercera edición ed.). Milano: Bompiani.
- Eco, U., & Carrière, J.-C. (2010). *Nadie acabará con los libros* (Primera edición [Original 2009: N'esperez pas vous débarrasser des livres] ed.). (H. Lozano Miralles, Trad.) Buenos Aires: Lumen.
- Edwards, C. H. (1973). *Advanced Calculus of Several Variables* (Primera edición ed.). New York: Academic Press.
- Edwards, C. H., & Penney, D. (1996). *Cálculo con Geometría Analítica* (Cuarta edición ed.). (Ó. Palmas Velasco, & V. H. Ibarra Mercado, Trads.) Naucalpán de Juárez. México: Prentice Hall.
- Else, M. (2008). *Reading as a Learning Strategy for Mathematics*. Lincoln: University of Nebraska – Lincoln Press.
- Elsgolts, L. (1977). *Ecuaciones diferenciales y cálculo variacional* (Segunda edición ed.). (C. Vega, Trad.) Moscú: Mir.
- Fernández Bravo, Á., & Torres, C. (2003). *Introducción a la escritura universitaria. Ciudades alteradas. Nación e inmigración en la cultura moderna* (Primera edición ed.). Buenos Aires: Granica.
- Feyerabend, P. (1991). *Diálogos sobre el conocimiento* (Primera edición ed.). (J. García Bonafé, Trad.) Madrid: Cátedra.
- Forde, T. (2013). *Tips for Reading Your Mathematics Textbook*. Recuperado el 2013, de Houston University: www.math.uh.edu/~tomforde/MathReadingTips.pdf
- Freitag, M. (2010). Reading and Writing in the Mathematics Classroom. *The Mathematics Educator*, 8(1), 16-21.
- Furinghetti, F., & Radford, L. (2013). Historical Conceptual Developments and The Teaching of Mathematics: From Phylogenesis and Ontogenesis Theory to Classroom Practice . En L. English, *Handbook of International Research in Mathematics Education* (Segunda edición ed., págs. 631-645). New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.
- Genicot, L. (1990). *El espíritu de la Edad Media* (Segunda ed.). (M. J. Echevarría, Trad.) Barcelona: Noguer.

- Giusti, E. (1996). *Analisi Matematica 1* (Segunda ed.). Torino: Bollati Boringhieri.
- Gopen, D., & Smith, D. (Enero de 1990). What's an Assignment Like You Doing in a Course Like This?: Writing to Learn. *The College Mathematics Journal*, 21(1), 2-19. Obtenido de Jstor.
- Gopen, G. (2010). Perceiving structure. *Harvard Law School Bulletin*, 27-29.
- Gordon, S. (2011). Opportunities for Learning – A Self-Study of Teaching Statistics in a Mathematics Learning Centre. En S. Schuck, & P. Pereira, *What Counts in Teaching Mathematics. Adding Value to Self and Content* (Primera edición ed., págs. 127-145). Dordrecht: Springer.
- Gutenmacher, V., & Vasilyev, N. (2004). *Lines and curves* (Primera ed.). (A. Kundu, Trad.) Boston: Birkhäuser.
- Halmos, P. (1975). The Problem of Learning to Teach. *The American Mathematical Monthly*, 82(5), 466-476.
- Halmos, P. (2012). How to write mathematics. En N. Steenrod, P. Halmos, M. Schiffer, & J. Dieudonné, *How to write mathematics* (Tercera edición ed., págs. 19-48). New York: American Mathematical Society.
- Harel, G. (2010a). Problem Solving for the 21st Century. En B. Sriraman, & L. English, *Theories of Mathematics Education. Seeking New Frontiers* (Primera edición ed., págs. 343-367). Berlin: Springer.
- Haswell, R., Briggs, T., Fay, J., Gillen, R., Shupala, A., & Trevino, S. (1999). Context and Rhetorical Reading Strategies. *Written Communication*, 16(1), 3-27.
- Johansson, M. (2003). *Textbooks in mathematics education: a study of textbooks as the potentially implemented curriculum (Licentiate thesis)*. Recuperado el 6 de junio de 2009, de Luleå: Department of Mathematics, Luleå University of Technology: <http://epubl.ltu.se/1402-1757/2003/65/index.html>
- Johansson, M. (2005). *Mathematics textbooks – the link between the intended and the implemented curriculum? The Mathematics Education into the 21st Century Project*. Recuperado el 20 de junio de 2009, de Universiti Teknologi Malaysia. Reform, Revolution and Paradigm Shifts in Mathematics Education: http://math.unipa.it/~grim/21_project/21_malaysia_Johansson119-123_05.pdf

- Johsua, S., & Dupin, J. J. (2005a). *Introducción a la didáctica de las ciencias y de la matemática* (Primera edición ed.). (A. B. Narvaja, & N. Roggier, Trads.) Buenos Aires: Colihue.
- Kant, I. (1997). *La metafísica de las costumbres* (Primera edición. [Original 1797: Metaphisik der Sitten] ed.). (A. Cortina Orts, & J. Conill Sancho, Trads.) Barcelona: Altaya.
- Kant, I. (2010). *Lógica* (Primera edición ed.). (C. Correas, Trad.) Buenos Aires: Corregidor.
- Kenney, J., Hancewicz, E., Heuer, L., Metsisto, D., & Tuttle, C. (2013). *Literacy Strategies for Improving Mathematics Instruction* (Segunnda edición ed.). New York: Association for Supervision and Curriculum Development.
- Knuth, D., Tracy, L., & Roberts, P. (2012). *Mathematical Writing* (Segunda ed.). Stanford: Mathematical Association of America.
- Koyré, A. (2007). *Estudios de historia del pensamiento científico* (Décimosexta edición. [Original 1973: études d'histoire de la pensée scientifique] ed.). (E. Pérez Sedeño, & E. Bustos, Trads.) México D. F.: Siglo veintiuno.
- Krippendorff, K. (1990). *Metodología de análisis de contenido. Teoría y práctica*. (L. Wolfson, Trad.) Barcelona: Paidós.
- Krippendorff, K. (2012). *Information Theory. Structural models for qualitative data* (Tercera edición ed.). London: Sage.
- Kudriáv'tsev, L. D. (1983). *Curso de análisis matemático. Tomo I*. (Primera edición ed., Vol. I). (V. Fernández, Trad.) Moscú: Mir.
- Kudriáv'tsev, L. D. (1984). *Curso de análisis matemático. Tomo II* (Primera edición ed., Vol. II). (V. Fernández, Trad.) Moscú: Mir.
- Kuhn, T. (1989). *¿Qué son las revoluciones científicas? y otros ensayos* (Primera edición ed.). (J. Romo Feito, Trad.) Barcelona: Paidós.
- Kuhn, T. (2006). *La estructura de las revoluciones científicas* (Primera edición. Novena reimpresión. [Original 1962: The structure of scientific revolutions] ed.). (A. Contin, Trad.) Buenos Aires: Fondo de cultura económica.
- Labarre, A. (2002). *Historia del libro* (Primera edición en castellano [Original 1970, Histoire du livre] ed.). (O. Álvarez Salas, Trad.) México D. F.: Siglo xxi.

Lahire, B. (2004). *Sociología de la lectura* (Primera edición ed.). (H. García, Trad.) Barcelona: Gedisa.

Lakatos, I. (1984). *Preuves et réfutations. Essai sur la logique de la découverte mathématique* (Segunda edición ed.). (N. Balacheff, & J.-M. Laborde, Trads.) Paris: Hermann.

Lakatos, I. (2000). *Mathematics, science y epistemology* (Primera edición. Sexta reimpression ed.). Cambridge: Cambridge University Press.

Lampert, L. (1993). *How to Write a Proof*. Recuperado el 03 de 10 de 2011, de Systems Research Center of Digital Equipment Corporation in Palo Alto, California: <http://research.microsoft.com/users/lampert/pubs/lampert-how-to-write.pdf>

Lang, S. (1973). *Calculus of Several Variables* (Segunda edición ed.). Massachusetts: Addison-Wesley.

Lang, S. (1976). *Cálculo II* (Primera edición ed.). (H. Pereyra, Trad.) México D. F.: Fondo educativo interamericano.

Le Goff, J. (1996). *Los intelectuales en la Edad Media* (Primera edición ed.). (A. Bixio, Trad.) Barcelona: Gedisa.

Le Lionnais (comp.), F. (1976). *Las grandes corrientes del pensamiento matemático* (Tercera edición ed.). (N. Míguez, Trad.) Buenos Aires: Eudeba.

Leach, J. (2013). *Mathematics and Religion. Our languages the sign and symbol* (Segunda edición ed.). New York: Templeton Press.

Leithold, L. (1976). *The Calculus With Geometry Analytic, Third Edition* (Tercera ed.). New York: Harper & Row.

Leray, C. (2008). *L'Analyse de contenu. De la Théorie á la pratique. La méthode Morin-Chartier*. Québec: Press de l'Université de Québec.

Lesh, R., & Sriraman, B. (2010). Re-conceptualizing Mathematics Education as a Design Science. En B. Sriraman, & L. English, *Theories of Mathematics Education. Seeking New Frontiers* (Primera edición ed., págs. 123-146). Berlin: Springer.

Li, W. (2010). *Mathematical Logic Foundations for Information Science* (Primera edición ed.). Berlín: Birkhäuser.

Littau, K. (2008). *Teorías de la lectura. Libros, cuerpos y bibliomanía* (Primera edición ed.). (E. Marengo, Trad.) Buenos Aires: Manantial.

- Lledó, E. (1970). *Filosofía y Lenguaje* (Primera edición ed.). Barcelona: Ariel.
- Lovric, M. (2006). *Mathematics Textbooks and Promotion of Conceptual Understanding*. Recuperado el 5 de 3 de 2012, de www.math.mcmaster.ca/lovric/courses/Lovric_Texts_Fields.pdf
- Luenberger, D., & Ye, Y. (2008). *Linear and Nonlinear Programming* (Tercera ed.). New York: Springer.
- Lyons, M. (2011). Los nuevos lectores del siglo XIX: mujeres, niños, obreros. En G. Cavallo, R. Chartier, & C. R. Guglielmo Cavalllo (Ed.), *Historia de la lectura en el mundo occidental* (M. Barberán, M. Palomero, F. Borrajo, & C. García Ohrich, Trads., Primera ed., págs. 387-424). Buenos Aires: Taurus.
- Lyons, M. (2012). *Historia de la lectura y la escritura* (Primera ed.). Buenos Aires: Del Calderón.
- Mach, E. (1910). *La Mécanique. Étude historique et critique de son développement* (Tercera edición ed.). Paris: Hermann.
- Maddox, R. (2009). *A Transition to Abstract Mathematics. Learning Mathematical Thinking and Writing. Second Edition* (Segunda Edición ed.). San Diego. California: Elsevier Academic Press.
- Mamona-Downs, J., & Downs, M. (2013). Advanced Mathematical Thinking with a Special Reference to Reflection on Mathematical Structure. En L. English, *Handbook of International Research in Mathematics Education* (Segunda edición ed., págs. 165-182). New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.
- Mariotti, M. A. (2013). The Influence of Technological Advances on Students' Mathematics Learning. En L. English, *Handbook of International Research in Mathematics Education* (Segunda edición ed., págs. 695-724). New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.
- Martin, P., Knights, C., Vicent, J., Palastanga, N., & Stuart, M. (2013). *Writing Matters. The Royal Literary Fund Report on Student Writing in Higher Education* (Segunda edición ed.). London: Royal Literary Fund.
- Mason, J., & Johnston-Wilder, S. (2004). *Fundamental Constructs in Mathematics Education* (Primera ed.). London: RoutledgeFalmer.
- Mateos, M. (2009). Aprender a leer textos académicos: más allá de la lectura reproductiva. En J. I. Pozo, & M. Puy Pérez Echeverría, *Psicología del aprendizaje*

universitario: La formación en competencias (Primera edición ed., págs. 106-119). Madrid: Morata.

McLuhhan, M. (1993). *La galaxia Gutemberg. Génesis del "homo typographicus"* (Tercera ed.). (J. Novella, Trad.) Barcelona: Cículo de Lectores.

McMahon, K. (2013). *What's Going On With Student Writing?* (Segunda edición ed.). London: Royal Literary Fund.

Mitchelmore, M., & White, P. (2007). Abstraction in Mathematics Learning. *Mathematics Education Research Journal*, 19(2), 1-9 .

Morduchowicz, R. (2008). *La Generación Multimedia. Significados, consumos y prácticas culturales de los jóvenes* (Primera ed.). Buenos Aires: Paidós.

Morduchowicz, R. (2012). *Los adolescentes y las redes sociales. La construcción de la identidad juvenil en Internet* (Primera ed.). Buenos Aires: Fondo de Cultura Económica.

Moreau, J. (1993). *Aristóteles y su escuela* (Primera edición ed.). (M. Ayerra, Trad.) Buenos Aires: Eudeba.

Morgan, C. (2002). *Writing Mathematically. The Discourse of Investigation* (Tercera ed.). London: Palmer Press.

Morgan, C. (2012). *Writing Mathematically. The Discourse of Investigation* (Cuarta edición ed.). London: Palmer Press.

Murray, R., & Moore, S. (2013). *The Handbook of Academic Writing. A Fresh Approach* (Segunda edición ed.). New York: Open University Press. McGraw-Hill.

Narvaja de Arnoux, E., Di Stefano, M., & Pereira, C. (2009). *La lectura y la escritura en la universidad* (Primera edición, décima reimpresión ed.). Buenos Aires: Eudeba.

Nava Rodríguez, M. T. (1992). *La educación en la Europa Moderna* (Primera edición ed.). Madrid: Síntesis.

Neuendorf, K. (2012). *The Content Analysis Guidebook* (Segunda edición ed.). Thousand Oaks, California: Sage.

Nicol, C. (2011). Growing Possibilities: Designing Mathematical and Pedagogical Problems Using Variation. En S. Schuck, & P. Pereira, *What Counts in Teaching Mathematics. Adding Value to Self and Content* (Primera edición ed., págs. 45-60). Dordrecht: Springer.

Nicolau, J. C. (2005). *Ciencia y Técnica en Buenos Aires 1800-1860* (Primera edición ed.). Buenos Aires: Eudeba.

Österholm, M. (2006). Characterizing reading comprehension of mathematical texts. *Educational Studies in Mathematics*, 63(3), 325-346.

Palamidessi, M., Galarza, D., Schneider, D., & Landau, M. (2006). Doce reflexiones para una educación en red. En M. Palamidessi, *La escuela en la sociedad de redes. Una introducción a las tecnologías de la información y la comunicación en la educación*. (Primera edición ed., págs. 87-102). Buenos Aires: Fondo de cultura económica.

Parsons, C. (2008). *Mathematical Thought and Its Objects* (Primera ed.). New York: Cambridge University Press.

Peat, J., Elliott, E., Baur, L., & Keena, V. (2013). *Scientific Writing. Easy when you know how* (Segunda edición ed.). London: BMJ Books.

Pedersen, O. (2000). *The first universities. Studium generale and the origins the university education in Europe* (Primera edición, segunda reimpression ed.). (A. Northon, Trad.) Cambridge: Cambridge University Press.

Peláez Cedrés, Á. (2008). *Lo 'a priori' constitutivo: historia y prospectiva* (Primera edición ed.). Rubí (Barcelona): Abthropos.

Petrucci, A. (1999). *Alfabetismo, escritura y sociedad. (Prólogo de Roger Chartier y Jean Hébrard)* (Primera edición ed.). (J. C. Gentile Vitale, Trad.) Barcelona: Gedisa.

Petrucci, A. (2003). *La ciencia de la escritura. Primera lección de paleografía* (Primera edición en español ed.). (L. Padilla López, Trad.) Buenos Aires: Fondo de cultura económica.

Petrucci, A. (2011). La lectura en los últimos siglos de la Edad Media. En G. Cavallo, R. Chartier, & C. R. Guglielmo Cavallo (Ed.), *Leer por leer: un porvenir para la lectura* (M. Barberán, M. Palomero, F. Borrajo, & C. García Ohlrich, Trads., Primera ed., págs. 425-452). Buenos Aires: Taurus.

Pierce, J. (1980). *An Introduction to Information Theory. Símbolos, señales y ruidos* (Segunda edición revisada ed.). New York: Dover.

Pigel, F. (2010). *UNESCO Guidebook on Textbook Research and Textbook Revision* (Segunda edición ed.). Paris: UNESCO.

PISA. (2003). *Cadre d'évaluation de PISA 2003 – Connaissances et compétences en mathématiques, lecture, science et résolution de problèmes*. Paris: Organisation de coopération et de développement économiques.

PISA. (2006). *Assessing Scientific, Reading and Mathematical Literacy. A Framework for PISA 2006*. New York: Organisation for economic cooperation and development.

Poulain, M. (2004). Entre preocupaciones sociales e investigación científica: el desarrollo de la sociología de la lectura en Francia en el siglo XX. En B. Lahire, *Sociología de la lectura* (H. García, Trad., Primera edición ed., págs. 17-58). Barcelona: Gedisa.

Quine, W. V. (1986). *Teorías y cosas* (Primera edición ed.). (A. Ziri6n, Trad.) México D. F.: Universidad Nacional Aut6noma de México.

Rabuffetti, H. (1991). *Introducci6n al an6lisis matem6tico. (C6lculo 2)* (Cuarta edici6n ed.). Buenos Aires: El Ateneo.

Rey Pastor, J., Pi Calleja, P., & Trejo, C. (1968). *An6lisis Matem6tico II. C6lculo infinitesimal de varias variables. Aplicaciones* (S6ptima edici6n ed., Vol. II). Buenos Aires: Kapelusz.

Rey Pastor, J., Pi Calleja, P., & Trejo, C. (1969). *An6lisis Matem6tico I. An6lisis algebraico. Teor6a de ecuaciones. C6lculo infinitesimal de una variable*. (Octava edici6n ed., Vol. I). Buenos Aires: Kapelusz.

Rezat, S. (2008). Learning Mathematics with Textbooks. En O. Figueras (Eds.), C. J. Luia, S. Alatorre, T. Rojano, & A. Sep6lveda, *Proceedings of the Joint Meeting of PME 32 and PME-NA XXX* (Vol. 4, págs. 177-184). México: Cinvestav-UMSNH.

Rudin, W. (1980). *Principios del An6lisis Matem6tico* (Tercera ed.). (M. Ir6n Alcerreca S6nchez, Trad.) M6xico D.F.: McGraw-Hill.

Russell, B. (1988). *Introducci6n a la filosof6a de la matem6tica* (Primera edici6n ed.). Barcelona: Paid6s ib6rica.

Santal6, L. (1993). *Vectores y tensores con sus aplicaciones* (D6cimocuarta edici6n ed.). Buenos Aires: Eudeba.

Schwartzman, S. (2013). *The Words of Mathematics. An Etymological Dictionary of Mathematical Terms Used in English* (Tercera edici6n ed.). Washington: The Mathematical Association of America.

- Seguin, R. (2012). *The elaboration of school textbooks: methodological guide* (Tercera ed.). Paris: Unesco. Recuperado el 11 de 4 de 2012, de www.unesco.org/education/pdf/55_16.pdf
- Smith, R., & Minton, R. (2001). *Cálculo. Tomo II* (Primera edición ed., Vol. II). (H. Castillo, & G. Villamizar, Trads.) Bogotá: McGraw-Hill.
- Somoza Rodríguez, M. (2012). Los saberes letrados en la sociedad de la información. Lectura, soportes y ritmos sociales. En H. Cucuzza (dir.), & R. Spregelburd (codir.), *Historia de la Lectura en la Argentina. Del catecismo colonial a las netbooks estatales* (Primera edición ed., págs. 573-614). Buenos Aires: Editoras del Calderón.
- Spivak, M. (1994). *Calculus* (Tercera ed.). Houston: Perish.
- Sriraman, B., & English, L. (2010). Surveying Theories and Philosophies of Mathematics Education. En B. Sriraman, & L. English, *Theories of Mathematics Education. Seeking New Frontiers* (Primera edición ed., págs. 7-28). New York: Springer.
- Steenrod, N., Halmos, P., Schiffer, M., & Dieudonné, J. (1975). *How to write mathematics* (Tercera edición ed.). New York: America Mathematical Society.
- Steiner, G. (2007). *Los logócratas* (Primera edición ed.). México D. F.: Fondo de cultura económica/Siruela.
- Stewart, J. (2008). *Cálculo multivariable* (Cuarta edición ed.). (J. Romo, Trad.) Bogotá: Thomson Learning.
- Strang, G. (2009). *Calculus* (Sexta edición ed.). Massachusetts: Wellesely-Cambridge Press.
- Tagle, M. (2007). *Historia del libro. Texto e imágenes* (Primera edición ed.). Buenos Aires: Alfagrama.
- Tall, D. (1991a). *Advanced mathematical thinking* (Primera edición ed.). Dordrecht: kluwer Academic Publishers.
- Tall, D. (1991b). The psychology of advanced mathematical thinking. En D. Tall, *Advanced mathematical thinking* (págs. 3-21). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Tall, D. (1994). *Understanding the Processes of Advanced Mathematical Thinking. Mathematics Education Research Centre*. Recuperado el 11 de julio de 2009, de

University of Warwick. An invited icmi lecture at the International Congress of Mathematicians, Zurich, August:

<http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot1996i-amt-pub-am.pdf>

Tall, D. (1997f). *Metaphorical objects in advanced mathematical thinking. International Journal of Computers for Mathematical Learning 1: 61 – 65.*

Recuperado el 12 de julio de 2009, de University of Warwick. : <http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/downloads.html>

Tall, D., & Katz, M. (2011). *A Cognitive Analysis of Cauchy's Conceptions of Continuity, Limit, and Infinitesimal, with implications for teaching the calculus.*

Recuperado el 23 de 05 de 2012, de www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall

Tall, D., Gray, E., Bin Ali, M., Crowley, L., DeMarois, P., McGowen, M., . . . Yusof, Y. (2001a). *Symbols and the Bifurcation between Procedural and Conceptual Thinking.*

Recuperado el 12 de julio de 2009, de University of Warwick. In Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education 1, 81–104.: <http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/downloads.html>

Taylor (Ed.), P., & Wallace (Ed.), J. (2007). *Contemporary Qualitative Research. Exemplars for Science and Mathematics Educators* (Primera edición ed.). Dordrecht: Springer.

Thomas, G. (2006). *Cálculo. Varias Variables* (Undécima edición ed.). (R. Iglesias, Trad.) México D. F.: Pearson Educación.

Thomas, G., & Finney, R. (1998). *Calculus and Analytic Geometry* (Segunda ed.). New York: Addison-Wesley.

Tuttle, C. (2013). Writing in the Mathematics Classroom. En J. Kenney, E. Hancewicz, L. Heuer, D. Metsisto, & C. Tuttle, *Literacy Strategies for Improving Mathematics Instruction* (Segunnda edición ed., págs. 24-50). New York: Association for Supervision and Curriculum Development.

Vergnaud, G. (2011). The Nature of Mathematical Concepts. En T. Nunes, & P. Bryant(eds.), *Learning and Teaching Mathematics: An International Perspective* (Primera ed., págs. 5-29). London: Psychology Press.

Vignaux, P. (1999). *El pensamiento en la Edad Media* (Primera edición ed.). (T. Segovia, Trad.) Madrid: Fondo de Cultura Económica.

- Vivaldi, F. (2011). *Mathematical writing. An undergraduate course* (Primera edición ed.). London: The University of London.
- Vygotski, L. (1994). Pensamiento y lenguaje . En L. Vygotski, *Obras escogidas, Volumen 2*. Madrid: Visor.
- Vygotski, L. (2006). *El desarrollo de los procesos psicológicos superiores*. Barcelona: Crítica.
- Weber, R. (2012). *Basic Content Analysis* (Tercera edición ed.). London: Sage University Paper Series.
- Whithehead, A. N., & Russell, B. (1910a). *Principia Mathematica. Volume I* (Primera ed., Vol. I). Cambridge: Cambridge University Press.
- Yaglom, A., & Yaglom, I. (1983). *Probability and Information* (Segunda edición ed.). (V. Jain, Trad.) Dordrecht: Kluwer.
- Young, E. (1993). *Vector and tensor analysis* (Segunda ed.). New York: Marcel Dekker.
- Zaid, G. (2010). *Los demasiados libros* (Primera ed.). Barcelona: Debolsillo.
- Zill, D. (2012). *Cálculo con Geometría Analítica*. Madrid: McGraw-Hill.
- Zorich, V. (2004a). *Mathematical Analysis I* (Primera ed.). (R. Cooke, Trad.) Berlín: Springer.
- Zorich, V. (2004b). *Mathematical Analysis II* (Primera ed.). (R. Cooke, Trad.) Berlín: Springer.

6. Notas

¹ “De nuevo, después de muchos siglos nacieron en la Europa occidental (en el Oriente greco–bizantino nunca habían desaparecido) unas verdaderas ‘bibliotecas de lectura’ destinadas al estudio y la enseñanza. Lo que provocó todos estos cambios fue la cultura universitario–escolástica [...]. Así nacieron las bibliotecas de los órdenes mendicantes y de los colegios de los siglos XIII–XIV, con una sala con una doble hilera de bancos y los libros encadenados encima, listos para la lectura, y otra sala con los libros conservados en los armarios disponibles para el préstamo externo. En resumen, verdaderas bibliotecas con puestos de lectura en el lugar y uso del préstamo, con encargados y con registros, con compras y también con hurtos y con pérdidas” (Petrucci, 1999, pág. 282). “La arquitectura bibliotecaria misma evolucionó. Los claustros y cubículos privados, pensados para la lectura oral, fueron arrancados y sustituidos por grandes salones donde estudiantes, profesores y otros usuarios se sentaban juntos en largas mesas de lectura personal y silenciosa [...] Para cubrir la creciente demanda de libros comenzó a tomar forma una industria editorial” (Carr, 2011, pág. 87).

² “Desde el siglo XII en adelante, pues, el auge de las universidades llevó a maestros y estudiantes al campo de la producción de libros durante las horas de clase, y estos libros volvieron a las bibliotecas monásticas cuando los estudiantes regresaban después de completar sus estudios” (McLuhhan, 1993, pág. 199). “... para que nos entendamos bien, alrededor de la fecha de nacimiento de Dante (1265), justo cuando la reorganización de las escuelas universitarias de saberes tradicionales, con su patrimonio de textos en lengua latina, alcanzaba su apogeo, sobre todo en los mayores centros de la alta cultura europea: París, Bolonia, Nápoles, Oxford, Montpellier. Allí, de un modo especialmente evidente, se hizo manifiesta una necesidad cada vez más fuerte de textos, o sea, libros referentes a las distintas materias enseñadas, útiles tanto para los profesores como para los alumnos.” (Petrucci, 2003, pág. 46). Un apretado resumen de las instituciones universitarias hecho por el destacado medievalista de la Universidad de Lovaina lo expresa en estos términos: “la *Universitas magistrorum et scholarium*, como creación estrictamente medieval, ya lo dice la palabra, es una corporación estable en una ciudad determinada que goza de privilegios concedidos por las autoridades religiosas y civiles. Tiene el derecho exclusivo de organizar los estudios y posee exenciones en materia legislativa, jurídica, fiscal y militar. Agrupa a aquellos que, teniendo licencia para ello, se dedican a la enseñanza y a quienes, procedan de donde procedan y cualquiera sea su origen, deseen ser instruidos, o más precisamente, conquistar un grado académico. A unos y a otros se les impone un programa de cursos, sancionados por exámenes, a cuya terminación se otorga la *licencia docendi* y con la que los estudiantes, podríamos decir los aprendices, pueden pasar a la categoría de maestros: como los estudiantes suelen ser numerosos los reparten en ‘naciones’. Y como también las materias son muchas se dividen en Facultades, cuatro cuando más: Artes, Teología, Derecho y Medicina. La primera es heredera de las escuelas carolingias y sirve de introducción a las otras tres. Se consagra en principio a las Siete Artes Liberales pero en realidad, aunque no olvida las otras ramas, da mayor importancia a la dialéctica, y a partir de ella, va sumando poco a poco otros aspectos de la Filosofía comprendidas las Ciencias Naturales que estaba consideradas como parte integrante de éstas. Una vez maestro en Artes y dotado de una seria cultura general el estudiante podía abordar la Teología, el Derecho o la Medicina. Estos son los rasgos esenciales de esas Universidades que se han ido constituyendo lentamente a lo largo del siglo XII en París y Bolonia y que se multiplicaron en imitación de ellas en el siglo XIII: Oxford, Cambridge, Colonia, Tolosa, Montpellier, Pavia, Salamanca, etc. (Genicot, 1990, pág. 232).

³ La escritura en la universidad medieval era una práctica especialmente intensa en la Universidad de París, y así lo refiere un texto de Itsvan Hajnal citado por Marshall McLuhan, *L’enseignement de l’écriture aux universités médiévales*: la enseñanza de la escritura “era un movimiento vital y constante, que añadía al placer de la práctica y empleo de la escritura, la adquisición de los propios textos. Ésta fue, quizá, la causa original de que la enseñanza universitaria en la Edad Media estuviese más y más caracterizada por la práctica de la escritura. No es extraño que desde el siglo XIV se considerase que la práctica de la escritura consistía la esencia de la vida universitaria de París” (McLuhhan, 1993, pág. 150).

⁴ Además de contrastarse la universidad actual con la de sus orígenes medievales, puede contraponérsela con la universidad en sus orígenes en Buenos Aires. Un decreto del gobierno fechado el 6 de marzo de 1823 exigía de los profesores la preparación de textos que pudieran ser utilizados para el estudio de sus asignaturas. Puede mencionarse el caso del profesor matemática Avelino Díaz, que publicara las “Lecciones elementales de aritmética (1823), Lecciones elementales de álgebra (1823), Lecciones elementales de geometría, en las que se consideran las rectas, planos y poliedros con independencia de las propiedades de la línea circular (1830)” (Nicolau, 2005, pág. 114).

⁵ La alfabetización es una noción que reconoce al menos seis grados que van desde culto (el individuo que domina sin dificultad tanto la producción de textos como su lectura todas las tipologías gráficas empleadas en

la sociedad a la que pertenecen) hasta la de analfabeto, pasando por los alfabetizados profesionales, alfabetizados instrumentales, semianalfabetos funcionales, semianalfabetos gráficos (Petrucci, La ciencia de la escritura. Primera lección de paleografía, 2003).

⁶ La alusión de Umberto Eco al texto clásico de Marshall McLuhan (*La galaxia Gutenberg. Génesis del 'Homo typographicus'*) publicado en 1962 se justifica por contraposición, ya que para McLuhan la era electrónica introducía al hombre en una segunda oralidad, por las características de los medios de comunicación más influyentes en aquellas décadas (la radio y la televisión). Entre las tesis fundamentales de esta obra clásica se encuentra que el mundo de los textos impresos es visual, frente al mundo previo que es fundamentalmente auditivo (por ejemplo, un sonido es considerado ruido por un lector silencioso) (McLuhan, 1993, pág. 39).

⁷ El mismo Chartier recuerda que la multiplicación de los libros con la imprenta es vista en la *Utopía de un hombre que está cansado* como una desgracia: "La imprenta, ahora abolida, ha sido uno de los peores males del hombre, ya que tendió a multiplicar hasta el vértigo textos innecesarios" (Borges, 1999, pág. 54), dice un habitante de un futuro lejano en la ficción borgeana y ante la pregunta de si en aquel futuro hay bibliotecas y museos responde "No. Queremos olvidar el ayer..." (*Ibidem*, 55).

⁸ "El iletrismo es una noción acuñada por asociaciones que, como ATD-Quart-Monde, han acompañado en sus dificultades a los 'nuevos pobres' de las sociedades desarrolladas. El término *iletrado* se aplica a la persona que ha sido escolarizada, pero que, por diversas razones, ha perdido la habilidad de lectura, ha 'desaprendido'; esta idea se precisa sobre la base de la definición de la Unesco del término *analfabeto*: 'persona incapaz de leer y escribir, aun comprendiéndolo, un relato simple y breve relacionado con su vida cotidiana' (Poulain, 2004, pág. 38). Los informes Pisa dan cuenta de la magnitud de fenómenos similares en la dimensión específica de la matemática (PISA, 2006).

⁹ "Cuando hacemos correr un texto en nuestra pantalla, ¿acaso no encontramos algo que los lectores de *volumina*, de rollos, hacían antaño, es decir la necesidad de desenrollar un texto enrollado en torno a un soporte de madera...?" (Eco & Carrière, 2010, pág. 102).

¹⁰ Que estas características del 'libro unitario' ya se encuentran asentadas hacia fines del siglo XVIII lo testimonia la cita de *Metaphysik der Sitten*, obra publicada por el filósofo de Königsberg en 1797: "Un libro es un escrito (es aquí indiferente que esté escrito con pluma o con caracteres tipográficos, en pocas o en muchas páginas) que, mediante signos lingüísticos visibles, representa un discurso que alguien dirige al público. El que *habla* al público en su propio nombre es el *autor* (*autor*). El que habla públicamente a través de un escrito en nombre de otro (del autor) es el *editor*. Este, cuando lo hace con permiso del autor, es el editor legítimo; pero si lo hace sin él es el editor ilegítimo, es decir el *reimpresor*. La suma de todas las copias del original (ejemplares) es la *edición* (Kant, 1997, pág. 114). Más de cien años habían pasado, al momento de esta líneas de Kant, que el formato de libro pequeño se había propagado desde su triunfo en las ediciones parisinas de la segunda mitad del siglo XVII (Chartier R. , 2006, pág. 116).

¹¹ Las imágenes y relieves de las catedrales medievales podían ser 'comprendidas por los analfabetos y además con una gran densidad de contenidos: "un tema favorito del siglo XIX fue el de que las catedrales fueron los 'libros del pueblo' [...] Contienen un amplio complejo de ideas que llenarían volúmenes si hubiesen de escribirse. Pueden ser 'leídas' por los analfabetos y también por los que saben leer, y están destinadas a unos y a otros" (McLuhan, 1993, pág. 165).

¹² El texto original de Umberto Eco dice "ripetto, poche icone per le operazione principale sono utili, troppe fanno fumigare le meningi e creano analfabetismo di ritorno" (Eco, 2006, pág. 173). E imagina que de proseguir esa profusión de imágenes, los actuales letrados se convertirán en analfabetos, incapaces de descifrar la cadena de imágenes: "Alle finne avremo programmi amichevolissimi, fatti tutti di geroglifici, dove anche quello che scrivo apparirà sullo schermo in forma di Anubi, di civetta, di bocca con una riga seghettata sopra: en invocheremo Champollion" (*Ibidem*, 173). También es pertinente recordar la especulación acerca de que el rol de los textos en la difusión del luteranismo fue muy limitada, no así el de las imágenes: "los periódicos ilustrados tenían más probabilidades de atraer a los lectores semialfabetizados. Eran un híbrido de imágenes y textos que, por su naturaleza visual, podían ser 'leídos' por personas alfabetizadas y analfabetos". (Lyons, 2012, pág. 101).

¹³ La dependencia de las lecturas del formato, como lo resume la frase "La manera en que la gente lee, incluso la experiencia misma de la lectura, dependen de las tecnologías usadas para registrar la palabra escrita" (Littau, 2008, pág. 21), puede ser considerada de muchas formas. Si la dependencia se piensa con fuerza para imponer la forma de lectura, se habla del determinismo tecnológico; en otro extremo, si se piensa que la dependencia es tan débil que no impide cualquier forma de lectura del texto, se tiene la libertad absoluta del lector. En esta concepción la libertad del lector es tal que ya no se distingue entre la lectura y su interpretación.

¹⁴ La autora hace notar que, en el ámbito de Francia, “el peso de las ciencias aumentó en detrimento de las letras. Para avanzar en los estudios científicos y técnicos estos estudiantes deben leer bien, pero no es necesario que les guste la lectura” (Chartier A.-M. , La memoria y el olvido, o cómo leen los jóvenes profesores, 2004, pág. 110).

¹⁵ La fragmentación de los textos constituye una pérdida del sentido de conjunto, que de hecho es el que confiere sentido a cada uno de los fragmentos. Nuevamente aquí se ha valido de la analogía entre los textos y las catedrales: “Un hombre de costumbres escolásticas consideraría el modo de presentación arquitectónica igual que consideró el modo de presentación literaria; desde el punto de vista de la *manifestatio*. Daría por supuesto que el propósito primario de los múltiples elementos que constituyen una catedral es asegurar la estabilidad, del mismo modo que daba por supuesto que el propósito primario de los múltiples elementos que constituyen una *Summa* es asegurar su validez (McLuhhan, 1993, pág. 171).

¹⁶ El término es una traslación del vocablo *multitask* que se utiliza en el lenguaje informático para designar aplicaciones que pueden llevar a cabo varios algoritmos en paralelo, administrando el tiempo concedido a cada uno de ellos, usualmente diferenciando entre tareas prioritarias (en un primer plano) y secundarias (en un segundo plano). Referido a las personas, designa a los “*multitareas intensivos* (practicantes frecuentes de la multitarea)” (Somoza Rodríguez, 2012, pág. 587).

¹⁷ El mismo autor, da cuenta de otros resultados: “...tienen más dificultades para diferenciar lo irrelevante de lo importante, tardan más tiempo en adquirir concentración al pasar de una actividad a otra, no presentan mayor capacidad retentiva y cometen más fallos. El investigador principal de este estudio afirmaba: ‘Los multitareas intensivos lo hacían cada vez peor a medida que aparecían más letras, mostrando una mayor dificultad para mantenerlas en su cerebro [...] los multitarea intensivos tienen siempre toda la información ante ellos, pero no pueden separar las cosas de su mente’” (Somoza Rodríguez, 2012, pág. 587).

¹⁸ Se reconoce en el lector una cierta expectativa acerca del modo en que los diversos componentes del contenido se habrán de presentar, una previsión respecto al énfasis, la composición, el aspecto bajo el que se organiza el texto que habrá de ser leído; estas expectativas operan sobre el lector en su interacción con el texto permitiéndole efectuar selecciones y omisiones sobre el contenido (Carlino, 2009, págs. 69-70; Narvaja de Arnoux, Di Stefano, & Pereira, 2009, pág. 7).

¹⁹ La siguiente frase reproducida por el autor del texto pertenece a un estudiante acreedor a la prestigiosa beca Rhodes, graduado en Filosofía en la universidad del Estado de Florida: “No leo libros [...] Acudo a Google, donde puedo absorber información relevante rápidamente. Sentarme a leer un libro de cabo a rabo no tiene sentido. No es un buen uso de mi tiempo, ya que puedo tener toda la información que quiera con mayor rapidez a través de la Web” (Carr, 2011, pág. 21). El estudiante, prosigue diciendo el autor, parece ser más la regla que a excepción.

²⁰ Parte de la energía que un lector invierte en la interpretación de un texto, cualquiera sea su naturaleza, es utilizada en la tarea de descubrir esa estructura, y por lo tanto es restada de la energía total disponible para el contenido sustantivo (Gopen & Smith, 1990, págs. 2-19). Desde esta perspectiva, se comprende el incremento del interés por los estudios que analizan la estructura de los textos en el área de la matemática avanzada, mediante una caracterización del modo en que se relacionan los segmentos funcionales de su prosa (Bagchi & Wells, 1998a, págs. 15-27; Bagchi & Wells, 1998b, págs. 116-136; Gopen G. , 2010, págs. 27-29). Puede verse la importancia de reconocer la estructura en la que se articulan los segmentos sintácticamente independientes en el texto de (Bagchi & Wells, Varieties of mathematical prose, 1998b), en el que se detallan las definiciones de: (a) definición, (b) especificación, (c) teorema, (d) prueba, (e) ejemplos con sus subclases –ejemplo sencillo, ejemplo motivador, ejemplo límite, ejemplo falso, contraejemplo–, (f) aplicación, (g) observaciones, (h) advertencia.

²¹ Un completo repaso de los factores relevantes que atañen a la escritura de la matemática avanzada se incluye en el capítulo 2 del texto de Morgan (2002, págs. 8-21), que da cuenta de posiciones que le asignan una importancia tal que se hace coincidir la totalidad de la matemática con el lenguaje, como recoge el aforismo “la matemática es un lenguaje”. “La lingüística y la lógica matemática han llevado los problemas del lenguaje, desde el punto de vista formal, a un particular estadio de desarrollo” (Lledó, 1970, pág. 15). El lenguaje en que los libros de texto de matemática tiene características que atañen tanto a la forma de referirse a sus objetos y a las relaciones que guardan entre ellos, como también a la naturaleza sintáctica que rige la composición de su sistema simbólico. Pero al contenido matemático se superpone el lenguaje natural, que está destinado a presentar o persuadir o llamar la atención del lector sobre algunos aspectos específicos del discurso. Sin embargo, no ha resultado sencillo separar lo que está escrito en lenguaje puramente simbólico y lo que está escrito en el “lenguaje corriente”, puesto que muchas veces uno no es sino una traducción del otro, como podría suceder en construcciones típicas tales como “si... entonces”.

²² La *lexical density* podría medirse como la relación entre la cantidad de palabras que actúan como significantes de objetos matemáticos y el de las palabras de naturaleza gramatical. De similares construcciones resultan los “índices de complejidad” cuya construcción incorpora la cantidad promedio de información transmitida. Las construcciones de los coeficientes se sustentan en concepto propios de la teoría de la información (Krippendorff, 2012; Yaglom & Yaglom, 1983; Li, 2010; Pierce, 1980; Taylor (Ed.) & Wallace (Ed.), 2007). La elevada densidad de contenidos de los textos científicos ha sido reconocida, con distintos nombres, como constitutiva de la ciencia. Es conocida la posición de Mach, que consideraba que la finalidad misma de la ciencia es alcanzar una economía de pensamiento para organizar datos mediante el mecanismo de la abstracción (Mach, 1910); Bachelard, aun reconociendo el carácter taquigráfico del lenguaje científico, ve implicado en el pensamiento “un verdadero finalismo matemático” (Bachelard, 1987, pág. 172).

²³ La densidad de la información de los textos de matemática avanzada es muy elevada respecto a los textos corrientes; esta diferencia cuantitativa es tanto global como local: la cantidad de conceptos involucrados en cada frase, en cada oración y en cada párrafo es varias veces superior a la media de un discurso no matemático [Cf. Reehm, S. P., & Long, S. A. (1996). *Reading in the mathematics classroom: Middle School Journal*, 27(5), 35–41]. Esta característica - conocida como comprensión - se ve potenciada por el código matemático y una notación que ha sido creada como una taquigrafía de la expresión y el pensamiento. En consecuencia, el tiempo que se pasa con una página de un texto de matemática debiera guardar una relación por lo menos igual a la de comprensiones con otros textos. Algunas mediciones prueban que la cantidad de información (medida con algunos de los conceptos de la teoría de la información) entre una página de un texto de álgebra lineal y un periódico con la misma cantidad de caracteres es del orden 30:1. Este dato habría de ser suficiente para explicar cuán escasa es la probabilidad que un alumno (o un profesor) pueda extraer algo en limpio de un texto técnico que le sea tan ajeno como las noticias, si le dedica igual tiempo que al diario del día. Para dar una idea de magnitudes, un texto técnico introduce al menos unos 3000 vocablos específicos, que supera el número de palabras que se aprende en un curso de lengua extranjera [Cf. Holliday, W. G. (1991). *Helping students learn effectively from science text*. In C. M. Santa & D. E. Alvermann (Eds.), *Science learning: Processes and applications* (pp. 38–47). Newark, DE: International Reading Association].

²⁴ La idea básica es que la abstracción opera sobre un conjunto de objetos se halla ya en los orígenes del término. El verbo ‘abstraer’ y su correspondiente sustantivo ‘abstracción’ (αφαίρεω, αφαιρεσις) en el original griego designaba la acción –y también el efecto– de extraer, separar algo de alguna cosa, significado que no varió en el latín tardío [*abstrahere, abstractionem* acusativo de *abstractio*, y *abstractus* participio pasivo de *abstrahere: abs* (desde) + *trahere* (sacar, arrastrar)], aunque se fue especializando para designar la operación –y su efecto– de poner mentalmente aparte una propiedad de una cosa para considerarla separadamente, o de varias cosas para considerarlas bajo esa misma propiedad común. Por ejemplo, se puede separar la noción de ‘círculo’ para considerarla aparte de cada uno de los objetos circulares, o también cabe considerar un miriápodo sin que haya animal alguno de mil patas. Los objetos matemáticos son, en esta visión aristotélica el resultado de separar mentalmente una nota esencial de una postulada realidad para generar un concepto que les es común a todos los miembros. (Aristóteles, 1967a, págs. LIII, CVII, 7; Aristóteles, 1967c, págs. LI, 1-2; Moreau, 1993, págs. 91, 171).

²⁵ El mismo ejemplo kantiano del concepto de ‘árbol’ es retomado por Eco: “la propiedad de algo de ser un árbol es uno de esos primitivos semiósicos que distinguimos instintivamente en el lenguaje que nos rodea, por lo cual diferenciamos un árbol de los animales y de los demás objetos (y no creo que un perro se porte de forma diferente, usando los árboles en general para sus necesidades corporales –salvo repugnancias a algún estímulo olfativo particular). Nosotros elaboramos, ante todo, un esquema del árbol (mientras que la diferencia entre haya y tilo pertenece sólo a un tipo de conocimiento más elaborado)...” (Eco, 1999, pág. 215). Los nombres son, entonces, un repertorio limitado que se utiliza para hablar de los fenómenos ilimitados, o en las propias palabras de Eco, “nosotros tenemos pocos nombres y pocas definiciones para una infinitud de cosas individuales. Por lo tanto el recurso al universal no es una fuerza del pensamiento, sino una *enfermedad del discurso* [bastardillas en el original]. El drama es que el hombre habla siempre en general, mientras que las cosas son singulares” (Eco, 1999, pág. 32). Para Werner Heisenberg “la inseguridad radical en la significación de las palabras ha sido causa de se intentase llegar a la seguridad de la definición, o sea a la delimitación de un marco que nos indica cuándo puede y cuándo no puede usarse una determinada palabra” (Lledó, 1970, pág. 126).

²⁶ El pasaje en el que Kant describe la obtención del concepto de árbol inicia diciendo que “para que las representaciones puedan pasar al estado de nociones, es necesario poder *comparar, reflejar* y *abstraer*: porque estas tres operaciones lógicas del entendimiento son, efectivamente, las condiciones esenciales y generales de la producción de toda noción. Veo, por ejemplo, un pino...” (Kant, 2010, pág. 131). Eco comenta el mismo

pasaje para separar la concepción kantiana de la escolástica y empirista: “Por otra parte, tampoco ‘abstraer’ en Kant significa tomar-de, hacer-surgir-de (que sería una perspectiva escolástica) y ni siquiera construir-mediante (que sería la posición empirista): es puro considerar-por-separado, es condición negativa, es suprema maniobra del entendimiento que sabe que lo contrario de la abstracción sería el *conceptus omnimode determinatus*, el concepto de un individuo que en su sistema es imposible: la intuición cencibel debe ser trabajada por entendimiento e iluminada por determinaciones generales o genéricas” (Eco, 1999, pág. 89).

²⁷ El producto de este tipo de abstracción es denominado por Quine llama *nombre de clase*, para distinguirlo de los *términos generales* y los *predicados*: “Finalmente, un nombre de clase no es un término general, por lo menos no hasta nueva orden, y no es un predicado. Es un término singular, simple o complejo, que *designa* [cursivas en el original] un objeto abstracto singular, una clase. El término general correspondiente *denota* cualquier número de objetos, cada uno de ellos miembro de una clase” (Quine, 1986, pág. 198). Como puede verse, mientras la función del término general es denotar, la del nombre de clase es designar. Los nombres de clase, entonces, pueden ser introducidos en la lógica de enunciados como variables cuyos valores son clases.

²⁸ La perspectiva de la abstracción empírica tampoco alcanzaría a explicar de qué manera podría llegarse a un concepto mediante una abstracción lograda desde una clase unitaria, esto es a partir de un solo caso, lo que ha sido demostrado no solo como potencialmente posible sino de modo concreto por David Hilbert: “la generalización con frecuencia se obtiene de la contemplación de un solo ejemplo” (Mason & Johnston-Wilder, 2004, pág. 133). En su estudio acerca de la Lógica de Lewis Carroll, Quine encuentra que la falta de distinción entre una clase unitaria y un individuo es compartida por Boole y Venn: “‘Una Clase que contiene únicamente un miembro se llama un Individuo.’ Por no distinguir las clases unitarias de sus miembros, Carroll continúa, característicamente, la línea que va de Boole a Venn. Frege y Peano ya habían apreciado por entonces la necesidad de esa distinción; pero el suyo es otro mundo” (Quine, 1986, pág. 170).

²⁹ Se designan como *sincategoremáticos* los términos que solo son definibles en un contexto, sin significado alguno cuando se encuentran aislados. Es precisamente su presencia la que implica el pasaje de los términos a los enunciados. “Los medievales tenían la noción de palabras *sincategoremáticas* [...] La definición contextual provocó una revolución en la semántica: menos repentina quizá que revolución copernicana en astronomía, pero semejante a ella por consistir en un desplazamiento del centro. Ya no se considera que el vehículo primario del sentido sea la palabra, sino el enunciado” (Quine, 1986, págs. 88-89).

³⁰ Esta concepción captaría una dificultad inherente de la abstracción teórica, pero ignoraría los otros aspectos que contribuyen a diferenciarla sustancialmente de la abstracción empírica, resultando así privilegiada la dimensión sintáctica de la matemática, con una pérdida relativa de las dimensiones pragmáticas y semióticas, formalismo que concibe la matemática como una ciencia vacía sin otro contenido sustancial que la consistencia de su propio discurso (Klimovsky y Boido, 2005, pág.274)

³¹ Una prueba de que esa forma de escribir no es un extremismo que infrecuente se encuentra leyendo las instrucciones para los autores de artículos a ser publicados en la revista de la *London Mathematical Society*: se requiere que en todas sus páginas se encuentre *al menos alguna* palabra del lenguaje natural. La limitación obedece a que se considera no solo que atenta contra la legibilidad, sino que se convierte en algo semejante a un peligro para el pensamiento: “No obstante la precisión de la que, tradicionalmente, se enorgullece el pensamiento terminológico y la clara delimitación conceptual con que parece investirse, la terminología ha sido siempre la paralización del pensamiento. No para el que la crea, sino para el que se sirve de ella, sin una previa reflexión sobre los pasos que el lenguaje ha dado hasta finalizar en el término” (Lledó, 1970, pág. 53).

³² El sacerdote jesuita y profesor de matemática de la Universidad Complutense de Madrid pone la invariancia del lenguaje en estos términos: “At any of the world’s great tourist sites—Paris, Tokyo, or Mexico City, for example—we typically see travelers using dictionaries to translate their native tongues into the local language, reminding us that our natural languages still divide us. At the same time, a language that seems to unite us wherever we go is the language of mathematics” (Leach, 2013, pág. vii).

³³ Naturalmente, existen discrepancias y posturas muy diferentes al respecto (Kuhn, 1989; Koyré, 2007; Kuhn, 2006; Lakatos, 1984; Feyerabend, 1991). Por ejemplo, se dice que “El sentido de un término no es otra cosa que la historia de su gestación [...] Precisamente, el término es sólo término para aquel que desconoce sus supuestos, o sea para aquel que desconoce su sentido” (Lledó, 1970, pág. 53). A los efectos de este trabajo, puede decirse que de no aceptarse la invariancia de algún núcleo matemático, los estudios solo podrían aspirar a una validez local atada a la lengua específica sobre la que se extrae y con la que se procesa la evidencia.

³⁴ El trabajo que los formadores habrían de cumplir consistiría en la identificación de los rasgos específicos del lenguaje que debe llegar a ser familiar a los estudiantes para escribir conforme a los cánones de la disciplina y los modos de convertir y reconfigurar sus conocimientos en esos formatos (Coffin, y otros, 2013, pág. 12). Otro

autor también da una descripción conforme a los principios generales: (1) compartir la riqueza del vocabulario de los libros de texto que están leyendo y todo otro material de lectura acerca de temas pertinentes; (2) concederle a los alumnos un espacio para escribir con la posibilidad de que sus escritos sean leídos. Enseñar a escribir matemática toma tiempo, pero se recupera largamente en comprensión; (3) conceder tiempo a los estudiantes para que lean los escritos de otros y se hagan devoluciones mutuas (Brummer & Kartchner Clark, 2008, pág. 13).

³⁵ En la escritura no hay ayudas contextuales que permitan reconstruir el significado de palabras o símbolos desconocidos, pues es el propio escritor quien debe crearlas. El vocabulario matemático que le llega al alumno a través de las clases y de las lecturas no es realmente incorporado, sino después que el estudiante logra integrar las palabras en su propio lenguaje escrito. La articulación de los términos técnicos en un discurso elaborado por el alumno ha probado ser el medio más eficaz –y eficiente– para la real comprensión de sus significados: “Writing is the way a student can personalize unfamiliar terms and incorporate them into his or her vocabulary” (Brummer & Kartchner Clark, 2008, pág. 20).

³⁶ Los vídeos, las audiciones, y los apuntes de los profesores no son fuente significativa de vocabulario; por el contrario, se sabe que lo que el alumno *convierte* en notas en sus clases es la fuente principal de vocabulario y comprensión, mientras que el resto está sujeto a una gran inestabilidad, borrándose o permaneciendo de modo confuso y hasta como un obstáculo. La actividad de convertir las clases en notas de clase se halla entre las más confiables fuentes de comprensión. Lo mismo vale para las lecturas en matemática: el solo esfuerzo de reproducir –hasta textualmente– una frase matemática tiene un efecto cognitivo más potente que el del solo recorrido con la vista del texto.

³⁷ “Los textos matemáticos pueden contener más conceptos por línea, frase o párrafo que cualquier otra clase de texto [...] Pueden estar más cargados de conceptos que los que se espera que aprendan en sus clases de idioma extranjero” (Barton, Heidema, & Jordan, 2002, pág. 25). Si el lenguaje de la matemática se expresa en términos matemáticos que los estudiantes tardan en descifrar, el pensamiento matemático mismo se ve obstaculizado, ya que “el lenguaje, al serlo de un pensamiento, constituye no sólo una vía de acceso, sino, además, una parte integrante y esencial de ese mismo pensamiento” (Lledó, 1970, pág. 119).

³⁸ En cualquiera de sus características, los enfoques también pueden combinarse con dos visiones no necesariamente incompatibles: Some teachers of academic writing [...] work within an ‘expert model’ where a writing facility offers its own teaching and tuition. Some strive for an ‘integration model’, which brings tutoring and workshops right into the individual disciplines (Björk, Bräuer, Rienecker, & Jörgensen, 2013, pág. 11). La figura siguiente (*Ibidem*, pág.10) resume las cuestiones centrales que aparecen según cada uno de los enfoques.

<i>The text in focus</i> - academic discourse	<i>The writer in focus</i> - individual discourse	<i>The discourse community in focus</i> - discipline specific discourse
<i>Key concerns</i>		
<ul style="list-style-type: none"> - content - rhetoric of science - scientific genre and genre conventions - text types - linguistics - meta-cognition - “that” - form 	<ul style="list-style-type: none"> - process - epistemology - identity, integrity, spontaneity - writer types, styles, voices - blocks, procrastinations - cognition - emotion - “I, him, her” - self-expression 	<ul style="list-style-type: none"> - social construction - academic literacy - discipline specific conventions - discourse “types” - discourse jargon - “us, them” - content and form within disciplines

³⁹ Las investigaciones han establecido suficientemente que los beneficios de leer matemática van más allá del aprendizaje de la matemática, pues alcanza a las capacidades de explicar y comunicar añadiendo profundidad a los contenidos sustantivos (Else, 2008), además de transferir el particular aprecio por la claridad como rasgo específico de la escritura académica (Day, 2013, pág. 1). “Los problemas que, por ejemplo, se plantean en torno a la lógica moderna, a la formalización del pensamiento, no pueden entenderse plenamente si no se les ve en el horizonte más amplio del lenguaje, incluso del lenguaje natural, del que de una manera o de otra, tienen que partir” (Lledó, 1970, pág. 99).

⁴⁰ La iniciativa proviene de la directora de la asignatura, Lic. Susana Gabbanelli a través de un proyecto que tras su aprobación cuenta con la activa intervención y participación de la Dra. Anahí Mastache de la Dirección de Calidad Educativa de la Facultad de Ingeniería de la Universidad de Buenos Aires. La dirección de Calidad

Educativa proporciona la difusión de los talleres y dispone de los espacios virtuales donde se asientan recursos didácticos y estrategias sugeridas para el desarrollo de los talleres.

⁴¹ Las plataformas asignan espacio para las correspondientes páginas (gestionadas por la Dirección de Calidad Educativa, cuya responsabilidad estuvo a Cargo de la Dra. Anahí Mastache, como así también la supervisión de los materiales y el diseño del curso) y son de acceso libre para los alumnos del curso. La directora de la cátedra de Análisis Matemático II, Lic. Susana Gabbanelli, dirigió el proyecto completo, interviniendo en decisiones tanto académicas como de gestión. Profesores de la asignatura estuvieron a cargo del desarrollo presencial de los talleres (Fernando Chorny, Claudia López, Marcela Martins, Silvia Seminara, Cristina Unger) que se desarrollaron en diez encuentros de tres horas (lectura) y de dos encuentros de tres horas (escritura). Este trabajo no da cuenta de los talleres en sí, sino del diseño instruccional y su materialización en sendas plataformas.

⁴² En términos técnicos “Moodle es una aplicación que pertenece al grupo de los Gestores de contenidos Educativos (LMS, *Learning Management Systems*), también conocidos como Entornos de Aprendizaje Virtuales (VLE, *Virtual Learning Managements*), un subgrupo de los Gestores de Contenidos (CMS, *Content Management Systems*)” (Baños Sancho, 2007, pág. 9).

⁴³ Las versiones de Moodle han ido modificando la variedad de roles que el Administrador puede asignar a los participantes. Desde el punto de vista de este trabajo, basta la división entre los que pueden manipular los contenidos y los que solo pueden ver los contenidos que los primeros han decidido volver visibles. La figura siguiente reproduce los roles incorporados desde la versión 1.7 de la plataforma (Baños Sancho, 2007, pág. 37).

Las funcionalidades de visibilidad y de asignación de roles de la plataforma Moodle

Iconos	Función
	Indica que el bloque es visible. Funciona como un conmutador: si se pulsa sobre él queda oculto para el estudiante, nunca para el docente y cambiará el icono al ojo cerrado.
	Indica que el bloque está oculto para los estudiantes. Al pulsar sobre él, el bloque se hace visible y el icono cambiará al ojo abierto.

Roles	Descripción	Usuarios
Administrador	Administrators can usually do anything on the site, in all courses.	1
Autores de curso	Course creators can create new courses and teach in them.	0
Profesor	Teachers can do anything within a course, including changing the activities and grading students.	0
Non-editing teacher	Non-editing teachers can teach in courses and grade students, but may not alter activities.	0
Estudiante	Students generally have less privileges within a course.	0
Guest	Guests have minimal privileges and usually can not enter text anywhere.	0

Fuente: (Baños Sancho, 2007, págs. 22, 37)

⁴⁴ El formato de Temas se edita en la ficha *Configuración* ingresando *Formato Temas* en el cuadro de texto del renglón *Formato*, y asignando en el siguiente *Número de Semanas/Temas* el valor numérico de las entradas que mostrará de modo indeterminado.

⁴⁵ El formato de taller y el de curso difieren en la concepción de la plataforma Moodle como también difieren en la idea misma que anima sus objetivos. En la literatura de los formatos instruccionales se ha marcado como diferencia fundamental entre el taller y el curso, la intensidad del *hacer*. Julio Cortázar decía de sus clases en Berkeley que “estos cursos los estoy improvisando muy poco antes de que ustedes vengan aquí [...] a medida que se me van planteando los problemas de trabajo, busco soluciones” (Cortázar, 2013, pág. 4). La metáfora con la que el escritor resume la diferencia entre el cuento y la novela se aplica, se entiende en el sentido de relaciones, a la diferencia entre un curso de formato tradicional y uno de taller, o una fotografía y una película: lo que distingue esencialmente unos de otros es su carácter: cerrado para el cuento, abierto para la novela. Una novela –dice Cortázar– puede terminar más o menos en cualquier parte y queda la impresión que podría haber continuado, mientras que un cuento tiene un momento a partir del cual debe terminar. Del mismo modo, los talleres como los diseñados en este trabajo, no contienen un número de *temas* que se agoten; más bien, queda la sensación que podrían haberse organizado con diferentes asignaciones temporales y temáticas

igualmente legítimas, respondiendo siempre parcialmente a las necesidades descritas en el encuadre del apartado 1 de este artículo.

⁴⁶ La observación fue especialmente remarcada por la Dirección de Calidad Educativa a través de la Dra. Anahí Mastache, quien advirtió de que la directa exposición de tal densidad de materiales e información podría resultar abrumadora a un participante del taller. Las herramientas de visibilidad tanto de los temas como de los recursos dispuestos en cada uno de los temas fue el vehículo que permitió eliminar el posible efecto indeseado. El mismo cuidado fue recomendado por la Directora de la asignatura, Susana Gabbanelli.

⁴⁷ Los *temas* dirigidos directamente a los estudiantes son de naturaleza diversa, intentando cubrir las múltiples diferencias entre los textos matemáticos y los textos corrientes de la cultura digital. Uno de ellos se denomina "Libros largos versus Libros cortos", que tiene el propósito de evitar transferir conocimientos del mundo digital al mundo de los textos técnicos; tal podría ser el caso si se pretendiera medir la longitud de un libro por su número de páginas, como se mide la longitud de mensajes intercambiados en el teléfono. Libros cortos versus libros largos. Para juzgar la extensión de un camino debe tenerse en cuenta que sea practicable, pues en otro caso no tiene derecho a llamarse camino, y el tiempo que lleva la empresa de recorrerlo. Para juzgar la extensión de un libro, consecuentemente, el miembro de la Académie française, Abad Jean Terrasson (1670-1750), proponía descartar el burdo método de contar el número de páginas: mejor medirlo por el tiempo que lleva comprenderlo. Este cambio de perspectiva pone las cosas en su lugar, y en especial lo hace con los libros técnicos. El primero que hizo constar las consecuencias de este principio fue un escritor de libros técnicos: Kant, que en su *Crítica de la Razón Pura* extrae un corolario: más de un libro (en cursivas en el original) sería mucho más corto si no fuera tan corto, jugando con el doble sentido de la longitud. Algunas de las restantes consecuencias están a la vista: es imposible, en una dada bibliografía clasificar los libros en cortos o largos, a menos que quien lo hace los haya leído (y comprendido) previamente. El dato, por otra parte, no le sería útil a otro que quisiera leerlo, pues cada cual tiene sus tiempos (en el mejor de los casos podría decirse que el dato le serviría como indicador relativo, suponiendo que su forma de avanzar en la comprensión varíe linealmente con la del que hizo los registros). Tómese, por ejemplo, el libro de *Álgebra Lineal* de Hoffman, unas 500 páginas y póngase junto al libro, también de álgebra lineal de Juan de Burgos, entre 700 y 900 páginas según ediciones. El criterio Kantiano, para el autor de este fragmento, le indicaría que el segundo es entre siete y diez veces más corto que el primero. Obsérvese que ni siquiera se está hablando de que ambos textos sean equivalentes en algún sentido -que no lo son-, sino meramente comparando en bruto la relación de tiempos efectivos para su comprensión. En este mismo apartado se muestran dos textos, ambos caben en una página. Uno de ellos, sin embargo, es considerablemente más largo que el segundo (¿unas 25 veces?). Jean Terrasson (1670-1750), *Philosophie nach ihrem allgemeinn Einflusse auf alle Gegenstände des Geistes und der Sitten*, tr. Frau Gottsched (Berlin, 1762), p. 117. The original (French) edition was: *La philosophie explicable à tous les objets de l'esprit et de la raison. Précédée des réflexions de M. d'Alembert, d'une lettre de M. Moncrif et d'une autre lettre de M. ... sur la personne et les ouvrages de l'auteur.* Paris: Chez Prault & Fils, 1754. El texto de Kant (en posiblemente la mejor traducción al inglés de hoy editada por Cambridge University Press en 1998) dice "Abbe Terrasson says that if the size of a book is measured not by the number of pages but by the time needed to understand it, then it can be said of many a book that it would be much shorter if it were not so short". Los traductores: Paul Guyer (University of Pennsylvania) y Allen Wood (Yale University). Como ilustración sirve la siguiente figura que contrapone dos páginas, (ambas de la misma extensión = una página) pero con una densidad conceptual muy diferente.

On dit qu'une famille d'applications $u_\alpha: E_\alpha \rightarrow F_\alpha$ satisfaisant aux conditions du cor. 1 est un *système projectif d'applications* de $(E_\alpha, f_{\alpha\beta})$ dans $(F_\alpha, g_{\alpha\beta})$; l'application u définie dans le cor. 1 est appelée la *limite projective* de la famille (u_α) et se note $u = \varprojlim u_\alpha$ lorsque aucune confusion n'est à craindre.

COROLLAIRE 2. — Soient $(E_\alpha, f_{\alpha\beta}), (F_\alpha, g_{\alpha\beta}), (G_\alpha, h_{\alpha\beta})$ trois systèmes projectifs d'ensembles relatifs à I ; soient $E = \varprojlim E_\alpha, F = \varprojlim F_\alpha, G = \varprojlim G_\alpha$, et soit f_α (resp. g_α, h_α) l'application canonique de E (resp. F, G) dans E_α (resp. F_α, G_α). Si (u_α) et (v_α) sont deux systèmes projectifs d'applications, $u_\alpha: E_\alpha \rightarrow F_\alpha, v_\alpha: F_\alpha \rightarrow G_\alpha$, alors les $v_\alpha \circ u_\alpha: E_\alpha \rightarrow G_\alpha$ forment un système projectif d'applications, et l'on a

$$(7) \quad \varprojlim (v_\alpha \circ u_\alpha) = (\varprojlim v_\alpha) \circ (\varprojlim u_\alpha).$$

En effet, si on pose $w_\alpha = v_\alpha \circ u_\alpha$, on a, pour tout $\alpha < \beta$

$$u_\alpha \circ f_{\alpha\beta} = v_\alpha \circ (u_\alpha \circ f_{\alpha\beta}) = v_\alpha \circ (g_{\alpha\beta} \circ u_\beta) = (h_{\alpha\beta} \circ v_\beta) \circ u_\beta = h_\alpha,$$

ce qui montre que (w_α) est un système projectif d'applications. En pose $u = \varprojlim u_\alpha, v = \varprojlim v_\alpha$, on a, pour tout $\alpha \in I$

$$h_\alpha \circ (v \circ u) = (v_\alpha \circ g_\alpha) \circ u = (v_\alpha \circ u_\alpha) \circ f_\alpha$$

et en raison de l'unicité de la limite projective, on a $v \circ u = \varprojlim w_\alpha$.

Soit $(E_\alpha, f_{\alpha\beta})$ un système projectif d'ensembles, et pour tout $\alpha \in I$, soit M_α une partie de E_α . Si l'on a $f_{\alpha\beta}(M_\beta) \subset M_\alpha$ pour $\alpha < \beta$, on dit que les M_α forment un *système projectif de parties* des E_α . Soit $g_{\alpha\beta}$ l'application de M_β dans M_α (pour $\alpha < \beta$) ayant même graphe que la restriction de $f_{\alpha\beta}$ à M_β ; il est clair que $(M_\alpha, g_{\alpha\beta})$ est un système projectif d'ensembles, et l'on a

$$(8) \quad \varprojlim M_\alpha = (\varprojlim E_\alpha) \cap \prod_{\alpha \in I} M_\alpha.$$

PROPOSITION 2. — Soient $(E_\alpha, f_{\alpha\beta}), (E'_\alpha, f'_{\alpha\beta})$ deux systèmes projectifs d'ensembles relatifs à I , et pour chaque $\alpha \in I$, soit u_α une application de E_α dans E'_α , les u_α formant un système projectif d'applications. Soit $u = \varprojlim u_\alpha$. Pour tout $x' = (x'_\alpha) \in E' = \varprojlim E'_\alpha$, les $u_\alpha^{-1}(x'_\alpha)$ forment un système projectif de parties des E_α , et l'on a $u^{-1}(x') = \varprojlim u_\alpha^{-1}(x'_\alpha)$.

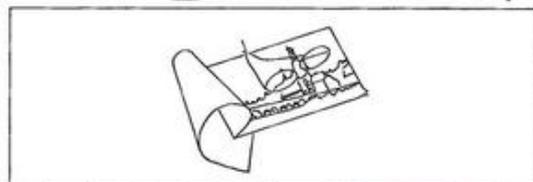
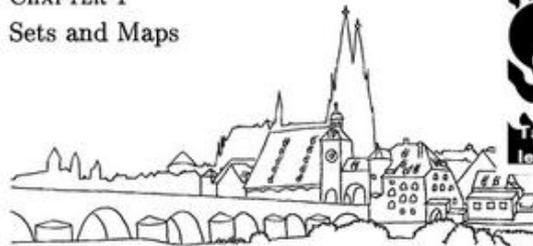
En effet, si $\alpha < \beta$ et $x'_\beta \in u_\beta^{-1}(x'_\beta)$, on a

$$u_\alpha(f_{\alpha\beta}(x'_\beta)) = f'_{\alpha\beta}(u_\beta(x'_\beta)) = f'_{\alpha\beta}(x'_\beta) = x'_\alpha,$$

d'où la première assertion; et dire que $x = (x_\alpha) \in E = \varprojlim E_\alpha$ est tel que $u(x) = x'$ signifie par définition que $u_\alpha(x_\alpha) = x'_\alpha$ pour tout $\alpha \in I$.

COROLLAIRE. — Si u_α est injective (resp. bijective) pour tout $\alpha \in I$, u est injective (resp. bijective).

CHAPTER 1
Sets and Maps



Klaus Jänich
(Linear Algebra)

1.1 Sets

Throughout your entire mathematical study, and particularly in this work, you will be continuously involved with *sets* and *maps*. In an ordinary mathematical textbook these concepts occur literally thousands of times. The concepts themselves are quite easy to understand; things become more difficult only when we concern ourselves (from Chapter 2 on) with what in mathematics is actually done with sets and maps. First of all, then, let us consider sets. From Georg Cantor, the founder of set theory, comes the following formulation.

"A *set* is a collection into a whole of definite, distinct objects of our intuition or of our thought, which are called the *elements* of the set."

A set consists of its elements. If one knows all the elements, then one knows the set. Thus the "collection into a whole" is not to be understood as doing something special with the elements before they can form a set. The elements form, are, and constitute the set — and no more. Consider the following examples.

⁴⁸ Para un destacado autor de textos matemáticos, la distinción es la que permite recorrer los textos según las características de los lectores. "Sería necesario diferenciar gruesamente dos partes de un libro de texto de matemática: la estructura *formal* o *lógica* consistente en definiciones, teoremas y pruebas, y el material complementario *informal* o de *introducción*, que consistiría en motivaciones, analogías, ejemplos, y explicaciones metamatemáticas. Esta división del material debería ser mantenida escrupulosamente en cualquier presentación, pues la naturaleza del tema requiere sobre todo que la estructura lógica sea clara [...] Aunque el propósito fundamental de un libro es presentar la estructura formal, un propósito secundario y casi de la misma importancia, es ofrecerle al lector las vías que le permitan encajar las nuevas estructuras en los conocimientos previamente organizados..." (Steenrod, Halmos, Schiffer, & Dieudonné, 1975, págs. 1-2). Nuevamente, el lenguaje se torna crítico si se atiende la observación de que así como "no es, por tanto, filosófica la estructura proposicional de un texto filosófico" (Lledó, 1970, pág. 84), así puede decirse que no es matemática la estructura de un texto matemático.