# LABORATORIOS DIGITALES DE AUTOEVALUACIÓN EN LA INGENIERÍA

**Autor/es:** MARTINS, Marcela; ACERO, Fernando.

**Institución de Procedencia**: Universidad de Buenos Aires. Facultad de Ingeniería.

**Correo electrónico:** facero@fi.uba.ar

**Eje Temático**: Evaluación de los aprendizajes.

**Tipo de trabajo**: Investigación

**Palabras Clave:** Autoevaluación - Interactividad - Alfabetización digital.

**Abstract**

En el escenario de las transformaciones propias de la sociedad del conocimiento y las innovaciones tecnológicas se han originado conceptos como el de alfabetización digital y autonomía del aprendizaje. La gestión autónoma del aprendizaje se ha convertido en una de las demandas inherentes al paradigma de aprender a aprender, siendo una de sus dimensiones la autoevaluación de los aprendizajes. ¿En qué medida la alfabetización digital puede ofrecer una respuesta al problema crítico de la realimentación en la autoevaluación del aprendizaje? Se responde aquí esta pregunta discutiendo el diseño y ejecución de laboratorios digitales en áreas básicas de la ingeniería.

Revisados los principios generales de diseño que se aplican a los objetos digitales de aprendizaje en cuanto a género, se establecen las diferencias propias correspondientes a la especie que conforman los laboratorios virtuales de autoevaluación, y se aplican las pautas obtenidas en la ejecución de ejemplares concretos en áreas del Cálculo y el Álgebra Lineal.

.Los laboratorios virtuales en la ingeniería constituyen una respuesta alineada con la demanda de alfabetización digital, y contribuyen a la transferencia del control de los aprendizajes hacia el alumno. La realimentación exigida por la autoevaluación puede ser cubierta satisfactoriamente mediante la interactividad propia de los laboratorios digitales, complementada con actividades específicamente diseñadas para ese fin. Las actividades diseñadas provocan una interacción capaz de

proporcionar al estudiante la información instantánea suficiente acerca de la validez de sus procedimientos sobre el laboratorio, sin intervención del profesor.

## 1. Introducción

Este trabajo construye los fundamentos de diseño de los objetos digitales de autoevaluación como una especificación de los principios generales que se aplican a los objetos digitales de aprendizaje, y muestra cinco laboratorios digitales de autoevaluación resultantes de la aplicación de esos principios. La suficiencia de los principios es estimada por la calidad de los laboratorios de autoevaluación, que es medida a través de las dimensiones provistas por su finalidad básica: proveer realimentación inmediata al estudiante que interactúa con él para evaluar su competencia en la movilización de un concepto matemático a través de los diversos registros semióticos. La realimentación debe resultar de una evidencia inequívoca para el alumno que le permita un efectivo y autónomo control de sus aprendizajes. El laboratorio digital es entonces concebido como un entorno del alumno qua ha sido diseñado por un profesor para permitir que el estudiante pueda hacer una estimación de su competencia en una dada región conceptual – definida por el docente–mediante sus experimentos en el laboratorio que, en cierta manera, puede ser considerado su antagonista. Un laboratorio estará bien diseñado, desde esta perspectiva, si obliga al sujeto a tomar una serie de decisiones para alcanzar un estado solicitado por una actividad, y si ese conjunto de decisiones está guiado y sostenido por la puesta en acción de un área de conocimiento pertinente a la disciplina en la que el laboratorio reside. Así considerado, un laboratorio digital de matemática ajusta de modo casi arquetípico lo que Guy Brousseau[1] denomina una situación matemática, en tanto que "provocan una actividad matemática en el alumno sin intervención del profesor" (Brousseau, 2007, p. 17). Los laboratorios digitales aquí considerados residen en las áreas del Cálculo de una y varias variables, el Cálculo Variacional, y el Álgebra Lineal, todos en el nivel propio que estas disciplinas alcanzan en la formación básica en las carreras que se ofrecen en las facultades de ingeniería.

Es sabido que en la región"muchas escuelas y universidades permanecen ajenas al movimiento de las tecnologías digitales"(Silva, 2005, p. 21), y se registra ladisconformidad del estudiantado con la baja intensidad del uso de la tecnología los procesos educativos, cuyas tareas apenas exigirían la utilización recursos digitales

(Cramer, 2007, p. 130).Los informes internacionales marcan un déficit en la alfabetización digital de toda la región sudamericana, señalando que los profesores debieran encontrar vías para una integración auténtica de las herramientas tecnológicas familiares al mundo en que se mueven sus alumnos, además de lograrlo de un modo no ocasional, sino planificado a lo largo del curso(Gutiérrez Martín, 2003, p. 11; Brunner, 2003b, p. 17; Silva, 2005, p. 21; UNESCO, 2002, p. 58). Los laboratorios digitales, como género, son posibles gracias a las tecnologías de la información y comunicación[2], y surgen en el contexto del pasaje anunciado de la sociedad de la información a la del conocimiento todavía en proceso[3](Pozo & Monereo, 2009, p. 14), cuyos altos niveles de incertidumbre –dicen los expertos–aconsejan incorporar en los procesos educativos herramientas que permitan una personalización de los procesos de aprendizaje, ofreciendo a los alumnos la oportunidad de alcanzar su apropiación de los conceptos con una mayor intervención y menos control e intervención del docente en estos procesos. Esta orientación, además, debiera ser especialmente intensa en los primeros años de estudio de las carreras, donde tienen lugar los aprendizajes de los saberes básicos en su doble acepción de imprescindibles a la vez que esenciales(Tedesco, 2009, p. 50-55, 77).

La presencia de los *objetos digitales de aprendizaje*[4], esas "herramientas interactivas en red que permiten el aprendizaje de conceptos específicos para ampliar, potenciar y guiar los procesos cognitivos de los aprendices"(Kay & Knaack, 2009, pág. 6), ha experimentado un crecimiento exponencial desde su aparición hacia principios de la década de 1990 (Walsh, 2006, pág. 13ss.); mayor todavía ha sido la velocidad de crecimiento de la especie denominada *mathlet* (*Mathlet* es el nombre de una especie que pertenece al género de los *objetos de aprendizaje*, siendo la diferencia específica determinada por el tema del que trata, siendo ese tema la matemática para un *mathlet*). Su aptitud como lenguaje adecuado al siglo XXI (Cramer, 2007, p. 130) se atribuye a su flexibilidad y elevado grado de interactividad (Silva, 2005, p. 19), al dar respuestas inmediatas como devolución de las acciones ejercidas sobre el objeto por parte de los estudiantes (Engelbrecht & Harding, 2005b, p. 254; Engelbrecht & Harding, 2005a, p. 243-244; Allen, 2003, p. 270-274). Se señala también, como beneficio indirecto, la multiplicidad de oportunidades ofrecidas por el laboratorio digital para una transformación dinámica de la información en conocimiento, puesto que, liberado del costo temporal de las operaciones aritméticas, el estudiante puede efectuar conjeturas y ponerlas a prueba de inmediato(Gutiérrez Martín, 2003, págs. 11-14).

La interactividad del objeto digital, por otra parte, es vista como una condición congruente con los modos de aprender de la así llamada generación digital, que combina, elabora y construye sus saberes mediante la interacción, con dispositivos que la presentan en formatos de muy diversa naturaleza, y están diseñados específicamente para estimularla: un escenario digital generado para ser desplegado en una pantalla bidimensional debe contemplar una tercera dimensión que permita al alumno, además de mirar lo que sucede, intervenir activamente para modificar eso que está sucediendo(Silva, 2005, págs. 14-15), que son los modos propios de una generación cuyos miembros están "llegando a convertirse en autores, al desarrollar las múltiples aplicaciones que ofrece el software libre o social, weblogs, podcastings, wikis…"(Pozo & Monereo, 2009, p. 15).

No obstante la atención recibida por los *objetos digitales de aprendizaje* en el nivel universitario, puede decirse que ha sido menos explotada la incorporación de tecnología mediante los *laboratorios digitales de evaluación* de los aprendizajes, con la posible excepción de las áreas de medicina y negocios, donde los simuladores son utilizados desde hace una década (Boyle, 2003; Cramer, 2007; Czerniewicz & Brown, 2005; Jessup, 2007; Kalman, 2005; Kay & Knaack, 2009). Las investigaciones específicas referidas a los laboratorios digitales coinciden en señalar que su diseño y utilidad requiere una muy precisa guía de instrucciones de lo que se espera de sus interacciones con los objetos (Badia 2006, Czerniewicz y Brown 2005, Czerniewicz, Ravjee y Mlitwa 2005, Moreau 2002, Zschocke 2002, Czerniewicz 2001).

Es aquí donde surge una que dificultad ha sido especialmente señalada por la investigación, y se relaciona con la cantidad y diversidad de habilidades que habría de reunir un docente que quisiera incorporar estas tecnologías. Como inventario, Ives Moreau(2002, p. 2-5) apunta que el profesor debiera tener la habilidad para: (a) concebir contenidos aptos para ser presentado digitalmente; (b) prever escenarios anticipando las reacciones de un auditorio imaginado; (c) comunicación no presencial; (d) diseño de la presentación; (e) programación elemental; (f) desarrollo de las aplicaciones; (g) administración de los recursos, si han de combinarse; (h) gestión de equipos de trabajo multidisciplinarios. Si el docente ya era un hombre-orquesta que debe actuar de bibliotecario, creador de contenidos, productor de presentaciones y notas, conductor y motivador de grupos y notario para acreditar los aprendizajes a través de evaluaciones, ahora debe también ser diseñador-autor, anticipador de escenarios que prevé y estima las reacciones de un auditorio no presente, un productor que gestiona un conjunto de medios. De hecho, aún cuando ciertos docentes puedan tener muchas de estas habilidades reunidas, un curso de un número de horas respetable, no podrá ser preparado por una sola persona, se necesita un equipo completo. Con todos los reparos así apuntados, este trabajo muestra que, en una modesta escala, la tarea no está completamente fuera del alcance del profesor, y que pueden obtenerse laboratorios digitales satisfactorios que permiten a los alumnos una autoevaluación sin necesidad de la intervención del profesor, propiedad ésta que permite 'amortizar' el esfuerzo de creación, ya que las distintas cohortes pueden reutilizarlo una y otra vez sin demandar una dedicación adicional a la invertida en su construcción. La alternativa –a veces irremediable– de la subcontratación de los servicios de expertos para la construcción de estos laboratorios no carece de riesgos para la educación, como los expresa la siguiente cita: "si los educadores no toman la iniciativa para desarrollar una metodología adecuada de incorporación de estos nuevos medios electrónicos y formas de comunicación a la educación, serán los expertos en informática y diseñadores de software quienes decidan cómo aprenderá la gente, qué aprenderá, y qué constituye la alfabetización" (Gutiérrez Martín, 2003, pág. 79); este trabajo puede considerarse justificado si, mediante las dimensiones básicas que logran diseños consistentes con los contenidos y objetivos sujetos a evaluación, permite a un profesor eludir el riesgo apuntado en la cita anterior.

## 2. Referentes teórico-conceptuales

Este apartado permite construir las dimensiones de diseño de los laboratorios, que comprende un criterio transversal resultante de la caracterización de los objetos matemáticos en general y diez criterios longitudinales derivados del concepto de registros semióticos (Pluvinage, 1998; Duval, 1998; Dorier, 2002) aplicados en los objetos digitales (Boyle, 2003; Cramer, 2007; Heck, Boon, & van Velthoven, 2008).

Un dado instrumento caerá –o no– bajo la categoría de 'instrumento de evaluación' según la definición de 'evaluación' con la que se esté operando; en este trabajo, consistente con el paradigma cognitivo "la evaluación es parte del proceso didáctico e implica para los estudiantes una toma de conciencia de los aprendizajes" (Litwin, 2003, p. 16), de modo que no opera como una última etapa sino como un proceso que acompaña los aprendizajes cambiando “el lugar de la evaluación como reproducción de conocimientos por el de la evaluación como producción, pero a lo largo de diferentes momentos del proceso educativo” (Ibidem, p. 17). Los objetos digitales de este trabajo se aproximan a lo que Scriven denominara ‘evaluación formativa’, y que permiten al alumno revisar sus aprendizajes para introducir los ajustes oportunos, según los resultados obtenidos. También desde el campo de la psicología cognitiva se señala que “el aprendizaje eficaz exige una gestión metacognitiva del conocimiento, esto es, el conocimiento y el control de las propias actividades de aprendizaje”(Pozo & Mateos, 2009, p. 64); precisamente, los laboratorios constituyen un ejemplar que satisface la necesidad expresada diciendo “tendremos que diseñar una secuencia didáctica que conduzca a una cesión progresiva del control del aprendizaje del profesor al alumno, de forma que éste se vaya convirtiendo, poco a poco, en entrenador de sí mismo” (Ibidem, p.64). En ninguno de los ejemplares aquí producidos el objeto está diseñado para cumplir funciones de acreditación de los aprendizajes.

En cuanto a lo que se refiere a los objetos propios de las áreas de conocimiento escogidas, puede decirse que se ajustan a una caracterización ontológica de los objetos matemáticos según la cual no existe una sola representación de objeto real alguno que pueda ser considerado un representante perfecto, siendo entonces necesaria mas de una representación para mejor posicionar conceptualmente al objeto matemático. En cualquier caso, se añade, que ninguna colección de representaciones cubre todas las dimensiones del objeto por completo (Pluvinage, 1998, págs. 1-16; Duval, 1998, pág. 185).

Sin embargo, no se puede hablar de un concepto sin dar, a su vez, alguna representación de él; estas representaciones se logran en un dado formato, utilizando un lenguaje que reconoce sus propias reglas gramáticas y sintácticas. A cada una de tales representaciones, que remiten a un aspecto específico del concepto se le denomina *registro semiótico*: una construcción realizada mediante signos pertenecientes a un sistema de representación con sus propias leyes de conexiones entre significados y significantes. Estos modos de representar los objetos matemáticos pueden agruparse en tres *registros* denominados *gráfico* (por ejemplo, una flecha representando un vector), *aritmético* (una n–upla para el mismo vector), o *simbólico* (ahora del vector sólo queda su pertenencia a una estructura de espacio vectorial sin ninguna otra nota adicional). En la bibliografía técnica también se habla también de *lenguajes* en lugar de registros, de modo que, con algunos matices, el lenguaje llamado por algunos autores '*geométrico*' admitiría una correspondencia ajustada con el registro *gráfico*, el llamado lenguaje *algebraico*se aparearía con el *aritmético* y el denominado *abstracto* estaría representado por el registro *simbólico*. Esta clasificación tiene como *fundamentum divisiones* el tipo de pensamiento que los anima. Así, el pensamiento que la corriente del pensamiento matemático avanzado a denominado *sintético geométrico* se corresponde al primero de los lenguajes; un ejemplo residente en el álgebra lineal diría que la ortogonalidad de vectores en $\mathbb{R}^2$ suscita el pensamiento de las posiciones relativas de un par de flechas perpendiculares. El *pensamiento sintético-analítico*, en cambio, es el que informa al segundo lenguaje, y aquí la referida ortogonalidad es concebida en términos de la anulación del producto escalar canónico introducido en $\mathbb{R}^2$. El *pensamiento analítico estructural*, finalmente, está como plataforma del tercer lenguaje; la ortogonalidad es ahora bastante más flexible, ya que queda definida a través de la introducción de un producto interno en un espacio euclídeo. La ortogonalidad está ya en la abstracción pura, ya que puede decidirse que dos cualesquiera vectores linealmente independientes en $\mathbb{R}^2$ sean ortogonales, y *posteriori*, introducir la geometría que valida esa elección, que por otro lado no es única[5](Dorier, 2002, págs. 878-889).

De esto resulta como mega-principio de diseño para los laboratorios virtuales la necesidad de tocarla mayor cantidad de registros semióticos del concepto, en una articulación progresiva que permita evaluar–y exija hacerlo– las conversiones y traducciones entre estos sistemas de representación para sus diversos niveles de abstracción. Sin embargo, de la naturaleza misma del laboratorio resulta la imposibilidad de pretender que sea capaz de evaluar todas las dimensiones de una dada abstracción (Butson, 2005; Day & Kalman, 1999; Kalman, 2005).

Al anterior principio transversal deben añadirse principios de diseño consistentes con este marco conceptual, que adaptan las recomendaciones del "Arbeloff Interactive Mathematics Project" del MIT (Miller & Upton, 2008). De esta manera cada laboratorio de autoevaluación debiera satisfacer los siguientes requisitos: (a) evaluar un concepto delimitado, minimizando la complejidad de la herramienta y maximizando la simplicidad de la ilustración; (b) presentar la información en en una variedad de formatos (gráfico, simbólica, numérica), permitiendo a través de sus conexiones (señaladas o sugeridas) una invitación a las traducciones; (c) incorporar elevado nivel de interactividad con representaciones actualizadas, permitiendo percibir de inmediato los efectos de las acciones (d) dosificar la información en la medida que lo requiera el usuario (e) controlar que la matemática subyacente en el mathlet resulte rigurosa, de manera de proporcionar datos experimentales que le permitan al estudiante contrastar sus acciones contra la lógica del laboratorio. Una ordenada grilla-resumen queda materializada en la Tabla 1.

| Principios teóricos de diseño de los laboratorios virtuales de autoevaluación | |
|---|---|
| 1. El concepto | Debe identificarse previamente un segmento de conocimiento a enseñar; los aspectos múltiples pueden introducirse con casillas de habilitar o deshabilitar. Si se trata de un sistema de conceptos, son las actividades introducidas las que deben evaluar su integración en el conjunto organizado. |
| 2. Reg. Gráfico | Los objetos gráficos presentes en la pantalla deben ser nítidamente diferenciados y sólo incluidos en tanto intervengan en la construcción del concepto. No deben incluirse gráficos que no desempeñen una actividad funcional al concepto. |
| 3. Reg. Aritmético | Las relaciones de la información textual o numérica con los objetos gráficos podrían ser sugeridas por alguna correspondencia de colores obrando como una dimensión más. La correspondencia también puede reforzarse mediante un apareamiento de posiciones relativas en el panel de control. |
| 4. Reg. Simbólico | Usualmente no se incluirá en el escenario, serán remisiones a través de actividades que obliguen al alumno a revisar los aspectos abstractos de lo que percibe en los otros registros. Debieran incluirse actividades cuyo desarrollo exija al estudiante tocar este registro ante la imposibilidad de ser cumplidas en el laboratorio. |
| 5. Interactividad | Ante acciones introducidas por teclado o mouse deberán producirse reacciones en los registros gráficos y aritméticos que constituyan una realimentación suficiente al operador, que le permita juzgar la movilización de sus conocimientos del concepto puesto en juego. |
| 6. Receptores | Son los dispositivos que reciben la acción del estudiante. Los más comunes son cursores deslizantes que permiten modificar los valores numéricos de un parámetro, casillas de ingreso de texto, cuadros de verificación, botones de animaciones. |
| 7. Información fija | Se designas así a los datos que permanecen invariables a las acciones.; usualmente son aclaraciones acerca del instrumental en el panel de control. Debiera ser minimizada a través de un diseño que torne la manipulación intuitiva y estar consignada en colores neutros de modo que no interfieran durante las operaciones. |
| 8. Mat. Base | Las modificaciones de los registros desencadenadas por las operaciones deben estar sustentadas rigurosamente en la base matemática del concepto que pretenden ilustrar. |
| 9. Flexibilidad | Podrá ser reutilizado para evaluar los aprendizajes del el mismo concepto con diferentes alcances, o diferentes aristas de un mismo concepto. La diferenciación se obtiene con las actividades propuestas y que son parte integral del laboratorio. |
| 10. Actividades | El añadido de actividades con breves consignas que dejen libertad de movimientos en su ejecución debe tocar los tres registros (gráfico, aritmético, simbólico). Esto obliga, como se señala en el ítem 4, a que al menos una de las actividades sea imposible con solamente el laboratorio. Las actividades deben dejar claro cuándo se considera que el alumno la ha cumplido satisfactoriamente. |

**Tabla 1. Los principios teóricos de diseño de los Laboratorios Digitales de Autoevaluación**

## 3. Aspectos metodológicos

La implementación de un laboratorio virtual requiere de un sustrato sobre el que debe desarrollarse. Se selecciona la plataforma de geometría dinámica Geo Gebra, con la intención de minimizar la ya sobrecargada exigencia de habilidades sobre el docente ya detallada en la Introducción de este trabajo. La elección es inclusiva en un triple sentido: (a) un docente puede construir excelentes laboratorios sin conocimientos técnicos de programación; (b) un alumno puede manipular la aplicación sin necesariamente tenerla instalada en su hardware; (c) la aplicación se descarga libremente (http://www.geogebra.org/), es de reducido peso (495 Mb en la versión 4.0.31.0) y puede ser libremente copiada, reproducida y utilizada con propósitos no comerciales[6]. Otras plataformas (libres) seleccionadas no se detallan[7]. En la Figura 1 se presenta una vista de la barra de herramientas que puede dar una idea parcial acerca decómo la aplicación asiste al profesor en la construcción de los Laboratorios Virtuales[8], justificando así la afirmación (a).


**Figura 1. Vista de la barra de Herramientas de GeoGebra**

Respecto a (b), es necesario decir que, una vez construido el laboratorio virtual, su alojamiento en la red para la manipulación de sus alumnos exige incrustarlo en una página con extensión html. Esta operación se logra con *archivo→exporta→Hoja Dinámica como Página Web*, ruta mostrada en la Figura 2.


**Figura 2. La ruta que permite incrustar el laboratorio en una página web con extensión html**

En la pantalla emergente de la acción anterior, seleccionada la pestaña *Exporta como Página Web*, se dispone de dos paneles donde escribir las actividades de autoevaluación que habrán de constituir el laboratorio: lo que se escribe en el primero de ellos se verá en la página web precediendo al laboratorio virtual, mientras

que lo escrito en el segundo aparecerá pospuesto. Finalmente, tras aceptar la exportación se guarda en una carpeta que constituye el laboratorio digital completo[9].
Es esencial, para que la página web así creada funcione de modo interactivo, que se incluyan una serie de archivos auxiliares, archivos que contienen el código de programación (Java). Para que el programa mismo genere estos archivos acompañando al archivo html debe asegurarse que se halle tildada la correspondiente opción, que se encuentra en la misma pantalla *Exporta como Página Web*, en la pestaña *Avanzado*, donde se puede leer el casillero *Admite Uso Fuera De Línea (Offline)*, tal como lo muestra la figura[10].

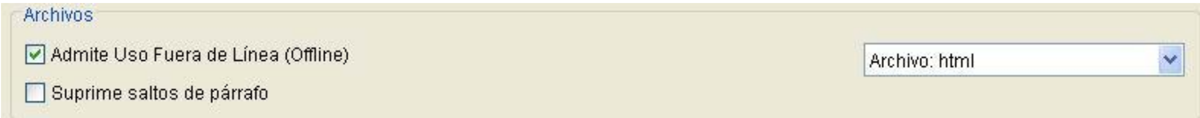



**Figura 3. El laboratorio es operativo sin la preinstalación de GeoGebra con la opción *Offline* tildada**

Una vez aceptada la exportación (de la página html con todos sus archivos auxiliares añadidos automáticamente) a una carpeta con un nombre dado, se tiene finalmente el laboratorio virtual listo para ser utilizado por cualquier alumno, disponga o no de GeoGebra en su hardware. Esto completa el aspecto material de los métodos utilizados en la fabricación de los laboratorios.
Con el procedimiento anterior, se construyen ahora cinco laboratorios: L1, L2, L3, L4, L5. El primero está concebido para evaluar –y eventualmente mejorar– los aprendizajes operados sobre algunas propiedades sencillas de las transformaciones lineales, considerando un escenario en el espacio $\mathbb{R}^2$ y eligiendo para la visualización la transformación de un polígono. El segundo para la autoevaluación de nociones simples propias de los sistemas dinámicos continuos unidimensionales en el espacio de estados;el tercero y cuarto nociones elementales de curvas en el cálculo diferencial y el quinto pretende evaluar–y estimular– la capacidad de efectuar cruces disciplinarios, movilizando conocimientos que normalmente se hallan confinados en asignaturas dispuestas según un*curriculum* de colección(Bernstein, 1988a). Los principios teóricos de diseño listados en la Tabla 1 son objetivados en cada uno de los cinco laboratorios, y la Tabla 2 explicita, a modo de ejemplo para el laboratorio L1,cómo y en qué medida se han cumplido esos principios.

Verificación del cumplimiento de los principios de diseño para el laboratorio L1

| | |
|---|---|
| 1. El concepto | Relaciones entre geometría y medida del polítopo H $\subset\mathbb{R}^m$ con las del transformado T(H) a través de la transformación lineal T: $\mathbb{R}^m\rightarrow\mathbb{R}^n$ El concepto abstracto se materializa en el laboratorio con n = m =2, y como polítopo se escoge un triángulo, que retiene su definición sin trivializarla, como sucedería eligiendo un segmento. |
| 2. Reg. Gráfico | Habiendo escogido como representante del polítopo acotado H un triángulo (amarillo), junto a su transformadoT(H) en color rojo, se representan ambos en el mismo sistema de coordenadas (en $\mathbb{R}^2$). Los vértices homólogos se reconocen por sus etiquetas (distinguidas en el registro aritmético por una simple tilde)y sus correspondientes colores. La pantalla principal del laboratorio se subdivide en dos: un sector (mayor, a la izquierda) para el registro gráfico y un panel de control (menor, a la derecha) para el intercambio de información. |
| 3. Reg. Aritmético | En el panel de control se informará de modo instantáneo las coordenadas de los seis vértices con sus colores correspondientes, el área de H, el área de T(H), la matriz asociada al operador T en la base canónica y el valor de su determinante. Las acciones emprendidas por el alumno sobre los cursores móviles también devuelven los valores que adoptan. |
| 4. Reg. Simbólico | A través de una T.L. T: $\mathbb{V}\rightarrow\mathbb{W}$ un segmento $A_1A_2$ del espacio vectorial $\mathbb{V}$se transforma en el segmento –posiblemente degenerado–$T(A_1)T(A_2)$ en el espacio vectorial $\mathbb{W}$, por lo que un polítopo H se transforma en otro polítopo T(H) y su medida es la de H multiplicada por $\sqrt{[\det(A^TA)]}$. Las remisiones a la bibliografía básica (Armstrong, 2001; Fraleigh & Beauregard, 1990; Hoffman & Kunze, Álgebra lineal, 1991; Luenberger, 1989) proporcionan respaldo autorizado a las cuestiones que necesitaran ser revisadas. Por supuesto, en el caso especial objetivado, el factor de conversión se convierte en el módulo del determinante de la matriz A. |
| 5. Interactividad | El usuario podrá modificar con mouse o teclado las posiciones de los tres vértices $A_0$, $A_1$, $A_2$ y los valores de los cuatro coeficientes a, b, c, d, de la matriz A = $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. El sistema le devuelve de manera instantánea los efectos sobre $A'_0$, $A'_1$, $A'_2$, det(A), área(H), área(T(H)). |
| 6. Receptores | Se disponen los controles deslizantes que pueden operarse con mouse o flechas de teclado, y se señalarán los vértices de H como pasibles de acciones. |
| 7. Información fija | Se dispondrá en el tablero de control, con color neutro grisáceo débil una breve explicación del significado de los dos triángulos y de las acciones disponibles. |
| 8. Mat. Base | Basta disponer el programa de modo que el triángulo $\lambda_1$ $A_1$ + $\lambda_2$ $A_2$ + $\lambda_3$ $A_3$ con los escalares $\lambda_k$ no negativos tales que $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$ sea graficado con el atributo color en amarillo, mientras que el $\lambda_1T(A_1)$ + $\lambda_2$ $T(A_2)$ + $\lambda_3$ $T(A_3)$ con el atributo rojo. Las funciones área y determinante están definidas en forma interna en el programa. |
| 9. Flexibilidad | Sin modificación del diseño, las actividades podrían desplazar el foco a la idea de autovalores y autovectores (por ejemplo, solicitando que se procure hacer coincidir en un punto distinto del origen de coordenadas dos vértices correspondientes, lo que significaría que se ha hallado un autovector de autovalor 1), o a la preservación de distancias o ángulos. Esta flexibilidad es la que permite la reutilización del laboratorio para la evaluación de distintos de conocimientos. |
| 10. Actividades | Se equipa el escenario con actividades que informanal que las manipula de los resultados de sus acciones a través de la consulta del registro aritmético sobre el panel de control y de inmediato a través del registro gráfico, de modo que las respuestas satisfactorias sean indicadores confiables de un dominio del concepto. También se presentan actividades que conviertan al laboratorio en poco adecuado o directamente inútil parra responderlas, exigiendo así el retorno al registro simbólico. |

**Tabla 2. Grilla de verificación de cumplimiento en el laboratorio 2 de los principios de la Tabla 1**

La técnica que permite controlar el diseño de los laboratorios materializada por intermedio de la Tabla 2 para el caso del Laboratorio 1 se replica, para los restantes, no siendo necesario entonces consignarlas en este trabajo.

## 4. Resultados alcanzados

El Laboratorio 1 resultante muestra un panel gráfico que en uno cualquiera de sus estados presenta un aspecto como el de la Figura 4, en la que se observa el triángulo amarillo H, y su transformado T, esto es T(H), que está sombreado de rojo.

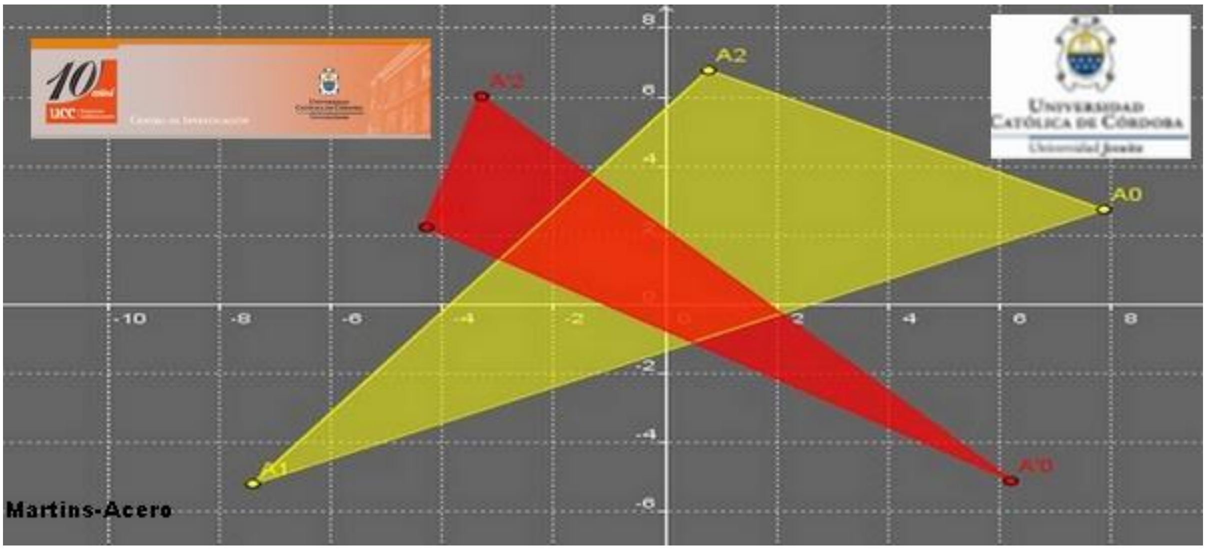



**Figura 4. El registro gráfico del Laboratorio 1: un estado para una dada transformación lineal**

En cuanto al registro aritmético, se presenta en la misma pantalla, a la derecha de la anterior, como un panel de control, cuyo aspecto preparado para esta presentación se muestra en la Figura 5, en la que los valores numéricos mostrados se corresponden en todo con los objetos gráficos que se muestran en la Figura 4.

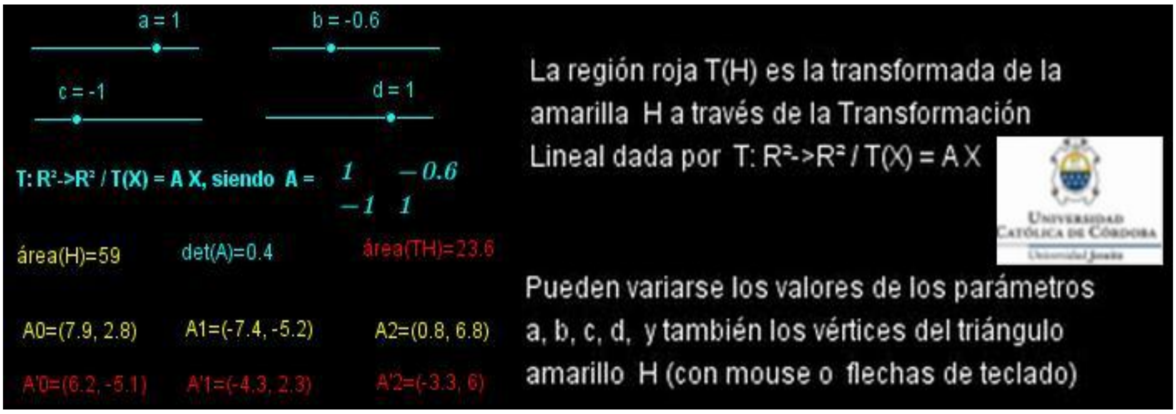



**Figura 5. El registro aritmético y la información fija del Laboratorio 1**

En el panel de control de la Figura 5 se incluye la información fija que, de acuerdo al principio 7 de la Tabla 1 y conforma a lo apuntado en la correspondiente fila de la Tabla 2, se ha reducido al mínimo suficiente para que el estudiante pueda comprender la dinámica del artefacto y sus posibilidades de interacción. Se supone que conoce que una transformación lineal T: $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $T(x_1, x_2) = (a\, x_1 + b\, x_2, c\, x_1 + d\, x_2)$ queda definida por los cuatro elementos de su matriz asociada en la base canónica de $\mathbb{R}^2$, que en el laboratorio está designada como $A = [T]_E = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, siendo sus valores específicos para la instantánea capturada en las figuras $A = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-0.6} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-1} \end{pmatrix}$, tal como lo informan las tres primeras líneas del panel de control de la Figura 5. Las coordenadas de los tres vértices del triángulo $A_0$, $A_1$, $A_2$ y de sus transformados a través de T, esto es $A'_0 = T(A_0)$, $A'_1 = T(A_1)$, $A'_2 = T(A_2)$, completan las dos últimas líneas del panel. Las correspondencias entre la Figura 4 y la Figura 5 son menos directas en la cuarta línea, en la que se muestran tres datos: el área de H, el valor del determinante de A, el área de $T(H) \stackrel{\text{def}}{=} \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : (u, v) = T(x, y), \text{ con } (x, y) \in H\}$. A diferencia de las coordenadas de los puntos $A_k$ o $A'_k$ ($k = 1, 2, 3$) que pueden 'verse' directamente en la Figura 4, las áreas de los triángulos y el determinante exigen algún cálculo, que está aquí delegado en el objeto digital.

Llamando E al estado del laboratorio, se observa que depende de diez parámetros: las seis coordenadas de los tres puntos $A_k$ y los cuatro elementos que componen la matriz A.  Sin embargo, estos parámetros no movilizan las mismas variables cognitivas: accionar sobre el laboratorio cambiando la posición de los puntos $A_k$ modifica el polígono transformado para *la misma* transformación lineal T, mientras que la manipulación de los coeficientes de la matriz A modifican el *mismo* polígono original H para distintas transformaciones lineales T. De esta manera, el estado E puede mejor considerarse como una función de H y T, esto es E = *f* (H, T); la amplia libertad otorgada para la modificación de los parámetros que definen H y los que definen T es lo que permite a este laboratorio satisfacer la condición de flexibilidad, para dotarlo de actividades que enfoquen aspectos muy diversos relativos a las transformaciones lineales: ¿qué experiencias de autoevaluación pueden hacerse en este laboratorio? Es precisamente al responder esta pregunta que resultan las actividades; se muestran aquí, a modo de ejemplo, algunas de las efectivamente introducidas.

**Actividad 1.** Con todos los controles disponibles, intente lograr un estado E del panel gráfico en el que el triángulo H sea tal que su transformado T(H) degenere en un segmento, tal como lo muestra la Figura 6. Una vez que lo logre indique sobre qué recta yace el segmento degenerado. Una vez que lo haya logrado, procure lograr un panel gráfico en el que un segmento original H degenere en un punto que no sea el origen de coordenadas. Redacte una instrucción que le permita a un par resolver esta tarea de un modo inmediato, y haga intervenir en su redacción las nociones de determinante, inyectividad, núcleo e imagen de la transformación lineal T.

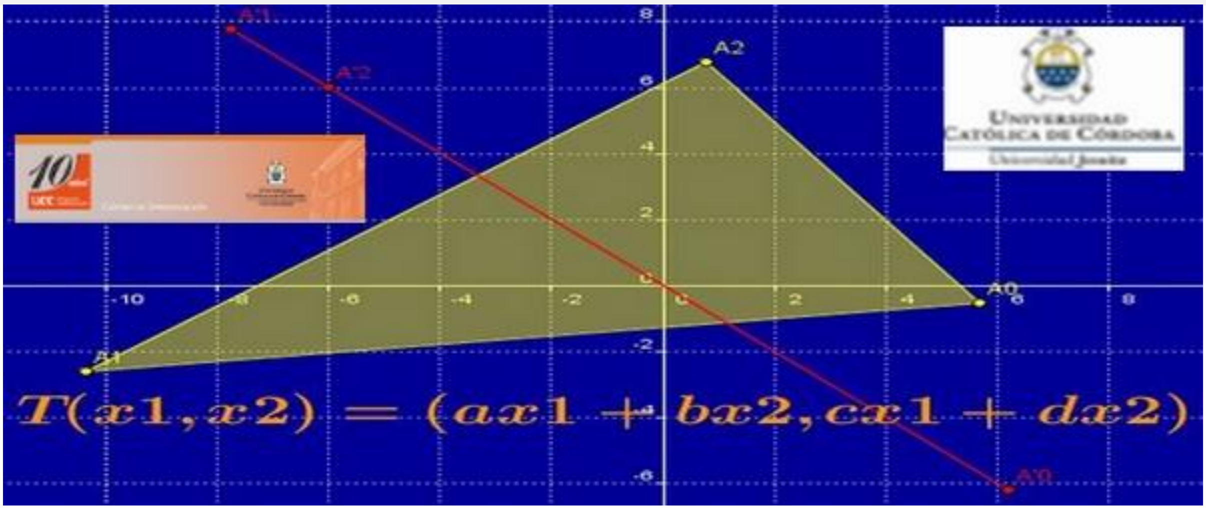



**Figura 6. Un estado E en el que el transformado del triángulo H degenera en un segmento**

Es importante asegurarse de que la actividad no pueda ser llevada a cabo por un mero azar de acciones no orientadas por un conocimiento específico. Esta actividad no puede resolverse manipulando H, ya que el triángulo de entrada nunca se transformará en un segmento si el determinante de la matriz es no nulo (y, recíprocamente, el transformado de cualquier triángulo H degenerará en un

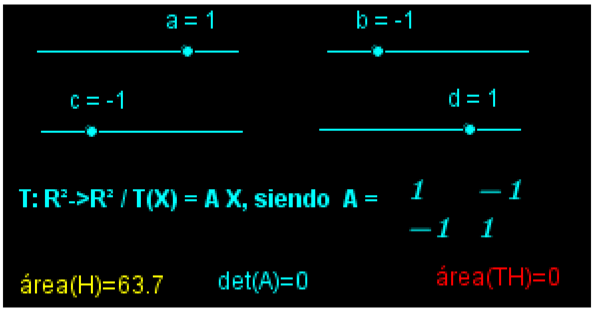



**Figura 7. Registro aritmético de Fig. 6**

segmento a través de una transformación lineal no inyectiva). En otras palabras, la función E = *f* (H, T) exige aquí acciones sobre T, siendo inútiles las que obran sobre el triángulo H, para alcanzar un registro aritmético como el de la Figura 7, donde se observa la dependencia lineal entre las columnas de A y su correspondiente determinante nulo. La actividad, entonces, se cumple de manera inmediata si se tiene este conocimiento de antemano; sin embargo, si por un azar el alumno encontrara una configuración como la exigida, debe ahora poder relacionar la recta en la que se inscribe el segmento degenerado, que no es otra cosa que el espacio columna de la matriz A (aquí equivalente al conjunto imagen de T), esto es que debe estar en condiciones de escribir que, en cualquiera de las infinitas configuraciones que satisfacen el problema, debe tenerse que T(H) $\subset$ col(T), con dim[col(T)] = 1. Es en este sentido que el laboratorio (junto a su actividad) cumple su objeto de evaluación formativa. La actividad continúa en niveles más profundos a los que se accede progresivamente con la ulterior exigencia de lograr ahora un estado E en el que un segmento H se transforme en un punto que no es el origen de coordenadas: el conocimiento básico de las transformaciones lineales habría de operar para descartar como solución la transformación nula.

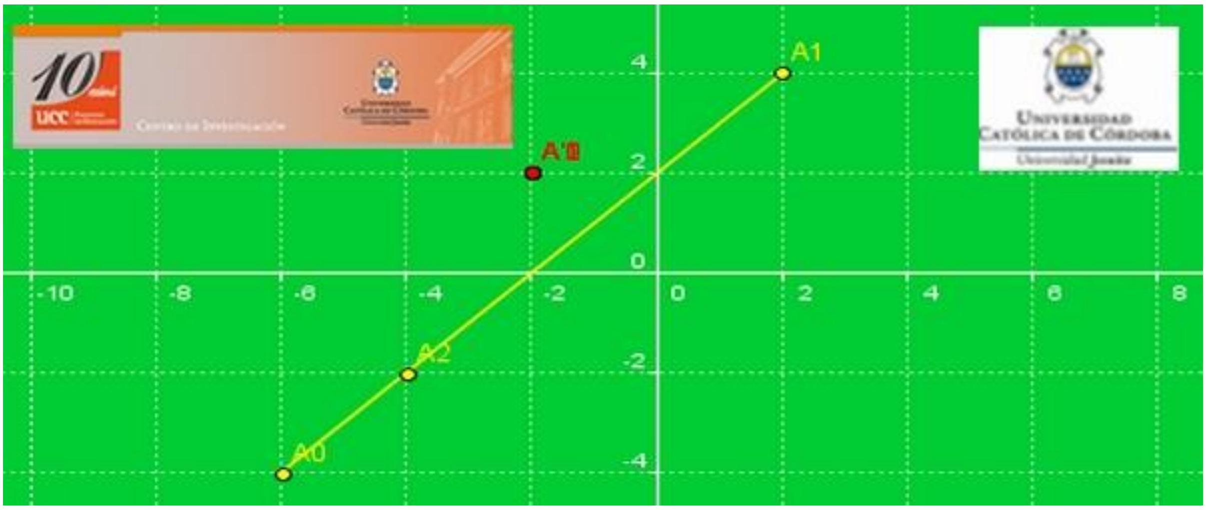



**Figura 8. Estado E en el que el transformado de un segmento H se reduce a un punto**

La manipulación ahora es sobre la primera componente de la función E = *f* (H, T), el alumno debe iniciarla con la transformación degenerada obtenida en la primera parte para modificar H. Nuevamente, el azar difícilmente le lleve a la solución, pero el ensayo y error puede ayudarle a comprender que lo que se necesita es construir un segmento H que yazga sobre una variedad lineal del núcleo de la transformación lineal T, esto es que H $\subset$ w + Nuc(T) para un cualquier w que no se encuentre en el núcleo de T, pues de esta manera, para cualquier x en H, se tiene que T(x) = T(w) y está claro que T(w) $\neq$ (0, 0) por la exigencia impuesta de que w $\notin$ Nuc(T). De esta manera puede alcanzarse un estado equivalente al de la Figura 8.

Puede observarse que el diseño de esta actividad obliga a pulsar todos los registros; algunos estados no pueden alcanzarse sin recurrir al registro simbólico, en tanto que constantemente se deben efectuar las traducciones de significados entre el registro gráfico y el registro aritmético.

La segunda ahora pide un estado E = *f* (H, T), con T fijada; lo que debe alcanzarse para cumplirla es un triángulo H que ajuste una condición inicial dada, en este caso debe ser el triángulo W = $\{(x, y)\in\mathbb{R}^2: |x|\leq y\leq 8\}$.

**Actividad 2.** El laboratorio devuelve un triángulo rojo una vez dado un amarillo. Aquí se trata de un desafío para el proceso inverso, esto es el de hallar la preimagen de un determinado triángulo rojo. Sea T(x1, x2) = (x1 − x2, x1 + x2). Sea la región dada por W=$\{(x, y)\in\mathbb{R}^2: |x|\leq y\leq 8\}$. Obtenga un estado E con una región H tal que T(H) = W. Una vez obtenida escribir su expresión analítica. ¿Este problema siempre ha de tener una solución? ¿Si la tiene, será única?

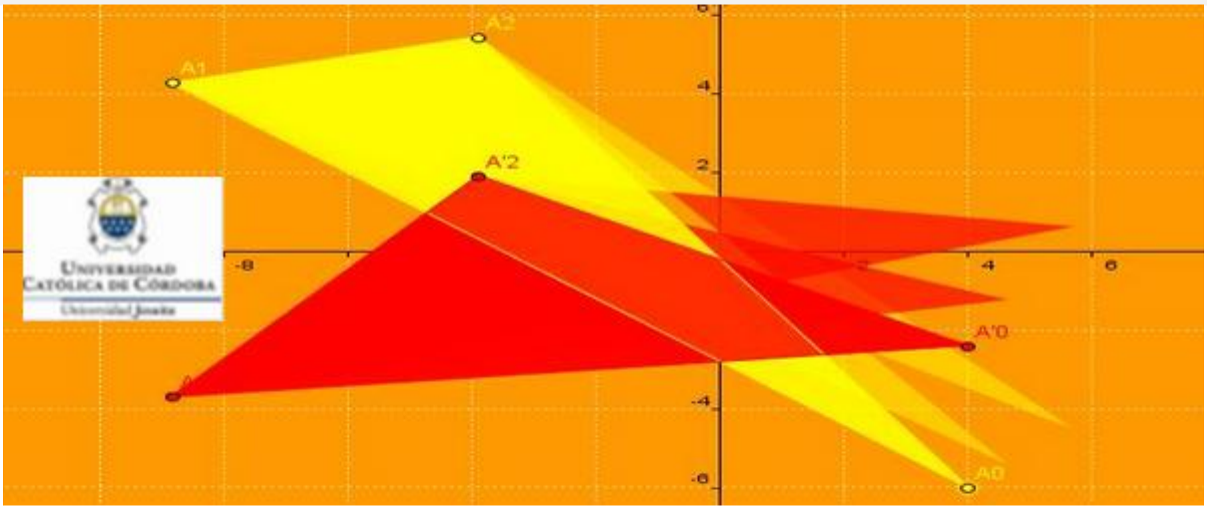



**Figura 9. Diversos ensayos para H que no producen el estado E exigido pro la actividad 2**

Es imposible cumplir esta activad ensayando triángulos amarillos: en la Figura 9 se ven algunos de esos ensayos fracasados que inducen a una estrategia menos ardua para cumplir el objetivo planteado (la probabilidad de encontrar por azar el triángulo pedido es del orden de uno en diez millones). Pero esa lleva directamente al registro simbólico, y consiste en resolver la ecuación T(X) = W, esto es hallar el conjunto X = H para el cual T(H) = W, de donde resulta el triángulo por W = $\{(x, y)\in\mathbb{R}^2$: $0\leq x$, $0\leq y$,

$x+y \leq 8\}$. El laboratorio L1 aquí solo es eficiente para que el alumno evalúe su resultado hallado en otro registro. La flexibilidad del laboratorio entonces resulta del tipo y perspectiva de la actividad que se le pide al alumno: el mismo artefacto es la plataforma de evaluación de diversos contenidos. Solo para mencionar algunas de sus posibilidades, puede pensarse en una actividad que, para una dada T, proponga al alumno el juego de lograr que dos vértices correspondientes coincidan en un punto que no sea el origen de coordenadas; el objetivo podrá alcanzarse, siempre que la T propuesta incluya al autovalor 1 en su espectro. La manipulación puede aquí servirle para 'acercarse' a posiciones favorables, y hasta es posible que pueda encontrarse de esta manera (siempre que el autovector asociado al autovalor 1 no tenga alguna componente irracional); la actividad debiera ser completada con cuestiones cuya respuesta asegure al alumno haber comprendido que los autovectores asociados al autovalor 1 ubican las posiciones que cumplen el juego.

El segundo laboratorio [11] reside en el campo de las ecuaciones diferenciales ordinarias, y si bien satisface los requisitos de diseño de la Tabla 1, difiere en la concepción al desarrollarse en profundidad, con una sucesión de pantallas con sendas actividades; el recorrido a través del conjunto de pantallas cumpliendo las actividades propuestas, permite al alumno asegurarse de tener una buena comprensión de las relaciones entre los comportamientos transitorio y permanente y los coeficientes de una ecuación lineal de primer orden mónica. Una de tales pantallas se reproduce en la Figura 10, en cuyo zócalo se observa el panel de navegación entre las pantallas mencionadas.

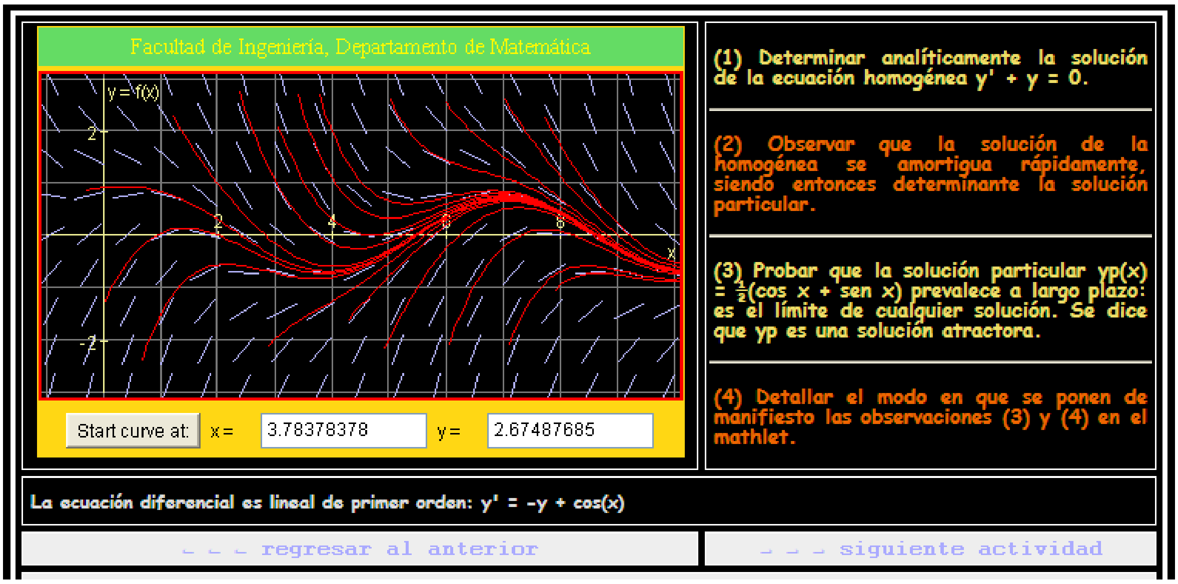



**Figura 10. Un estado E del laboratorio 2 donde se aprecian algunas curvas solución**

La información fija aquí se ha reducido al mínimo para presentar qué ecuación diferencial se está resolviendo. Cada vez que el alumno ingresa una condición inicial por el teclado, o bien con un clic sobre el registro gráfico, se muestra la evolución (hacia adelante) de la curva solución que pasa por el punto indicado. Las tres primeras actividades que se encuentran en este caso integradas en el panel derecho de la pantalla se responden necesariamente en el registro simbólico, mientras que la cuarta pretende comprobar qué significados geométricos y físicos tienen para el alumno los resultados alcanzados en el plano simbólico. El carácter atractor de la solución particular, que en el plano simbólico se prueba mostrando la convergencia (uniforme) de la familia de curvas solución para *toda* condición inicial, tiene como correlato en el registro gráfico el engrosamiento de la solución particular ante el disparo creciente de condiciones iniciales, mientras que la velocidad de amortiguamiento dl régimen transitorio se parecía por la rapidez con la que la trayectoria ‘busca’ la solución particular.

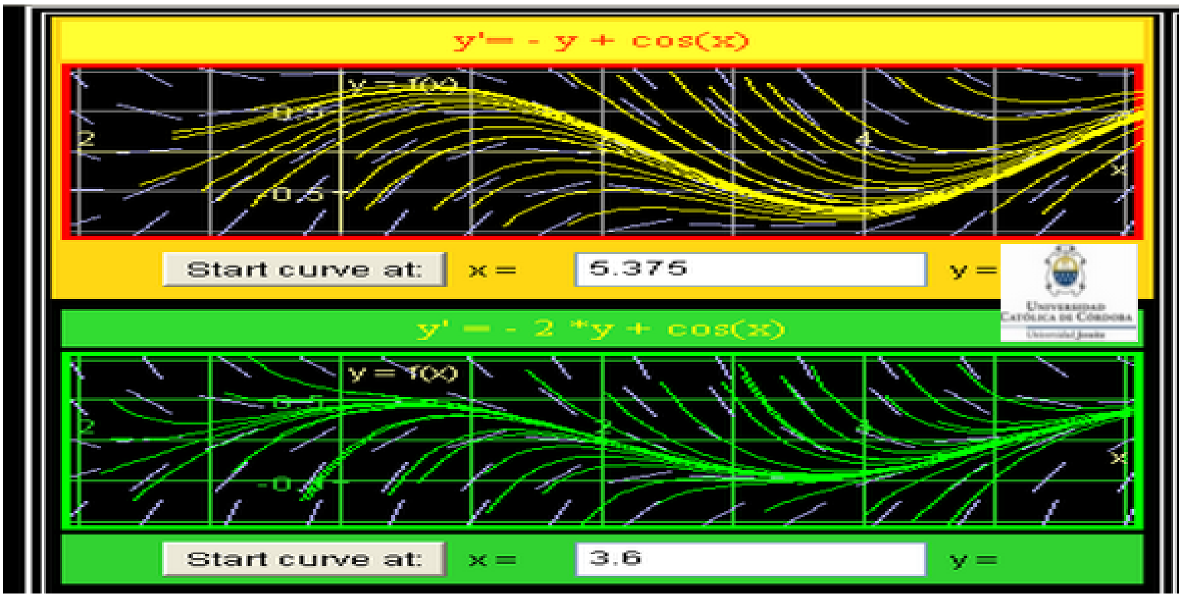



**Figura 11. Estado E del laboratorio 2 para evaluación de interpretación de coeficientes**

La Figura 11 muestra de qué manera progresan las actividades de evaluación, ahora ya no se trata de *una* ecuación diferencial sin un par (varias en la vista completa) que solo difieren en el valor de un coeficiente. Se le pide al alumno que dispare varias condiciones iniciales para que compare el efecto de la variación de ese coeficiente en el registro gráfico. Esta actividad precede a otra donde el coeficiente en cuestión ya pasa ser un parámetro más del problema: la evaluación ya se desplaza al análisis de escenarios en sistemas dinámicos unidimensionales y diagramas de bifurcación del equilibrio.

El laboratorio 3 se encuentra ya en el dominio de la geometría diferencial y se construye para evaluar nociones preliminares a la noción de curvas. El panel gráfico muestra una espiral con decaimiento exponencial en su radio vector que es seguida por el punto P, un punto Q que evoluciona dejando como rastro los puntos señalados con color verde, y dos caricaturas de batman y el hombre araña cuyos desplazamientos y proporciones se es relacionan, de alguna manera a determinar, con las evoluciones del punto P sobre la espiral marcada con trazo negro; a la derecha, el panel de control intercambia información con el alumno y traduce lo que acontece en la figura al lenguaje textual. Un botón en el ángulo inferior izquierdo permite correr o detener la animación, según que se quiera observar el comportamiento de las ecuaciones desplegándose en tiempo real, o retratadas en un corte transversal en la variable temporal *t*.

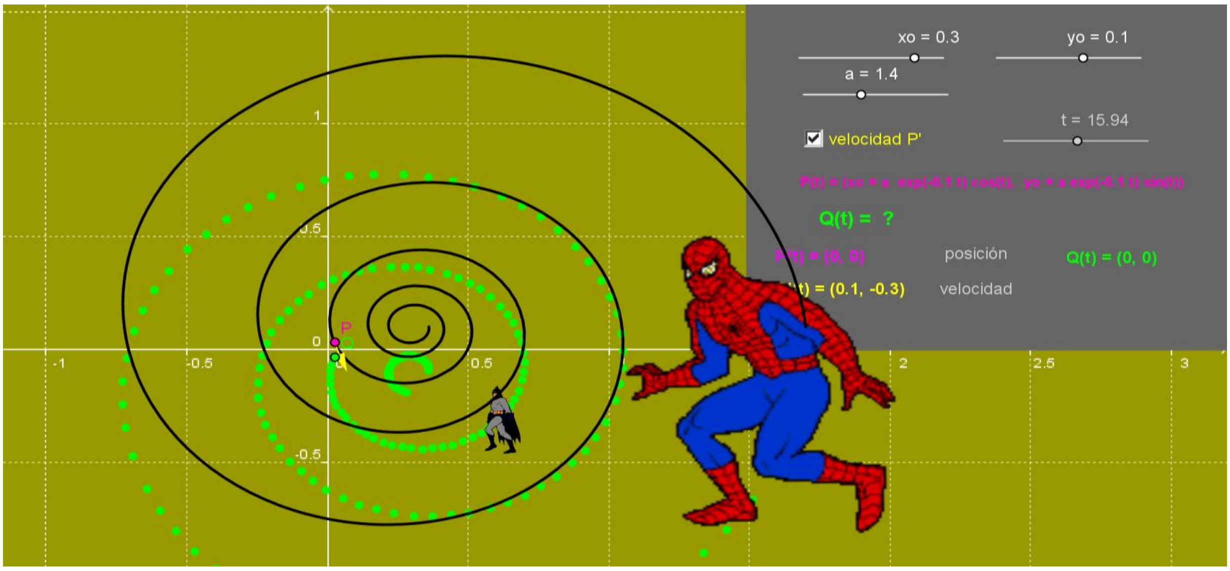



**Figura 12. Estado instantáneo de una animación incrustada en página html en el Laboratorio 3**

Las actividades de evaluación en este caso están centradas en la noción de parametrización de una curva junto a sus propiedades de regularidad, y se alcanzan mediante una adecuada traducción del registro gráfico, el más visible, al registro aritmético y luego simbólico. La información fija aquí se ha reducido a la única línea que da cuenta de una parametrización del punto P, y la primera actividad solo le logra si el alumno puede reconocer en ella (mediante sus propias experiencia sobre el objeto digital) el impacto que tiene la modificación de los parámetros con los cursores deslizantes que integran el mismo panel de control, en la parte superior, (estoes, $x_0$, $y_0$, *a*). Una vez superado ese nivel, las actividades examinan el grado de comprensión de la noción de velocidad, desafiando al alumno a escribir una parametrización consistente con la dinámica observada tanto para el punto Q como para las dos caricaturas, siendo la parametrización del Hombre Araña algo más compleja que la de Batman. Este laboratorio es un nuevo ejemplo de que la flexibilidad se alcanza mediante las actividades que lo constituyen como un "objeto para": la teleología del objeto solo resulta discernible cuando se le considera como una todo junto a sus actividades. Ya se ha dicho que las actividades pueden–y es deseable que lo hagan–incluir algunas remisiones bibliográficas o material textual especialmente preparado; estas inclusiones siempre mantienen alerta al alumno de que el material que se le ofrece es, como cualquier otro, una parte que pertenece a un todo, y que está ligada a saberes institucionales e institucionalizados[12].

Un laboratorio de autoevaluación, si bien debe satisfacer la condición de diseño 1 de la Tabla 1 (esto es, especificidad del contenido), pueden a la vezconcebirseparaevaluar–yestimular– la integración de nociones: de tal tenor es el Laboratorio 4, cuyo estado inicial se reproduce en la Figura 13. El área disciplinar básica es el Cálculo Vectorial, y las actividades progresan de modo que su cumplimiento revela el grado de integración de los conceptos incluidos en el laboratorio.


**Figura 13. Estado inicial del Laboratorio 4, registro gráfico y aritmético**

La elipse (curva roja) responde a la ecuación $(x–5)^2 + 10\, y^2 = 25$ se halla centrada en $P_0 = (5, 0)$ con semiejes $a = 5$, $b = 5/\sqrt{10}$. En la primera actividad al alumno se le informa que sobre la elipse el valor de un campo escalar diferenciable *f* permanece constante y se le pide la derivada direccional de *f* en la dirección de ciertos vectores v en algunos puntos P. Esta actividad tiene capacidad de evaluación mínima, ya que el alumno puede cumplirla con solo saber que para las condiciones informadas, la derivada direccional es $D(f, P) = \nabla f(P) \cdot v$, operación que por otra parte el laboratorio ejecuta en el registro gráfico de modo automático: bastará entonces que mueva el punto P y apunte el vector v en la dirección –y sentido– adecuada para lograrlo. Sin embargo, al desplazar P por la elipse el vector gradiente se comporta como muestra la Figura 14.

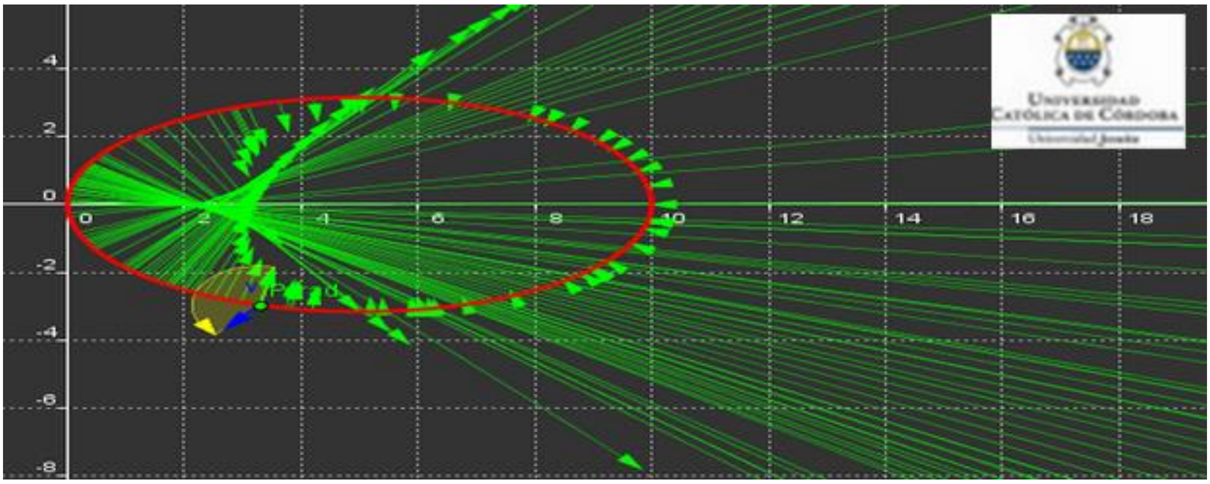


**Figura 14. El comportamiento del gradiente de *f* a lo largo de la elipse $(x-5)^2 + 10\,y^2 = 1$**

Las actividades siguientes ya evalúan la capacidad del alumno para interpretar la longitud del vector $\nabla f(\mathrm{P})$ al variar P sobre la elipse, añadiendo la información de que $f$: $D\subset\mathbb{R}^2\rightarrow\mathbb{R}$ talque $f(x, y) = (8x-2y^2)/x^2$, con $D = \{(x, y)\in\mathbb{R}^2\text{: } x\neq 0\}$.

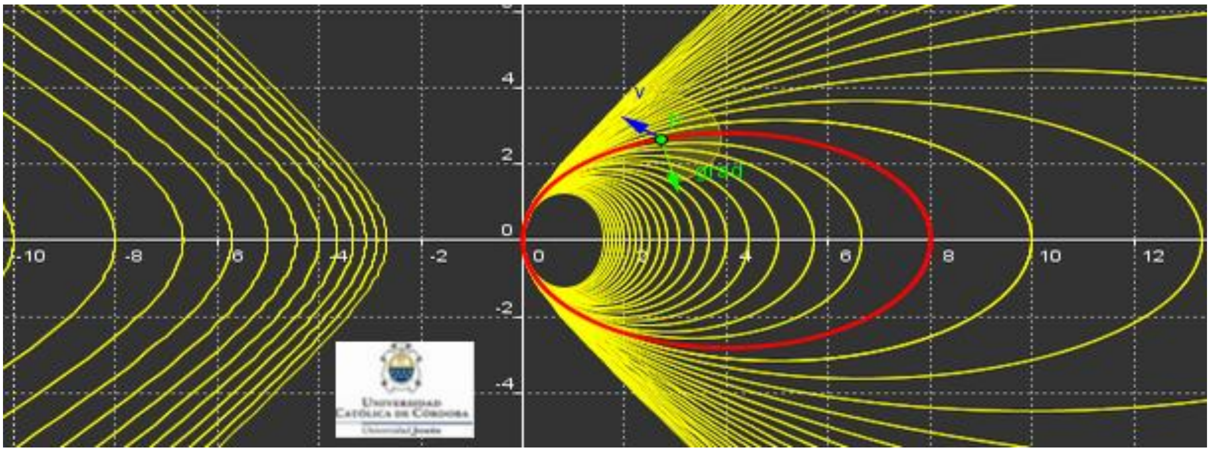


**Figura 15. El recorrido de los conjuntos de nivel del campo *f* a través de los tres géneros de cónicas**

El alumno no puede cumplir satisfactoriamente esta nueva batería de actividades a menos que significar la animación disparada mediante el botón de 'play' incorporado al laboratorio, que lo transportan al terreno de la geometría analítica, dado que la familia de curvas de nivel k, $C_k(f) \overset{\text{def}}{=} \{(x, y)\in D\text{: } f(x, y) = k, \text{ con k real}\}$ recorre todos los géneros de las cónicas. El desigual espaciamiento de las curvas de nivel para iguales espaciamientos del nivel k es el hecho que le permite explicar el comportamiento de la longitud del gradiente, con una singularidad en el origen de coordenadas (que no pertenece al dominio de $f$, y entonces tampoco pertenece a ninguna curva de nivel): la curva de nivel k = 0 es la única que provoca una parábola

– de ecuación $4x = y^2$– que marca la separación entre el género elipse (para k positivo) y el género hipérbola (para k negativo)[13]. Aunque no se asientan sobre este trabajo, lo dicho aquí basta para comprender la diversidad de posibilidades de introducir en el Laboratorio 4 actividades para evaluar–e integrar–conceptos como extremos de campos escalares sujetos a restricciones (Apostol, 1980, págs. 383-387; Kudriávtsev, 1983, págs. 101-115; Lang, 1976, págs. 139-142; Rey Pastor, Pi Calleja, & Trejo, 1968, págs. 219-225), el teorema de Green (Aman & Escher, 2008, pág. 281ss.; Curtis, 1979, págs. 419-428; Flanigan & Kazdan, 1975, págs. 392-402; Hoffman, 1975, pág. 160ss; Santaló, 1993, pág. 157ss), para poner dos ejemplos.

El Laboratorio 5 está dotado de una actividad que impulsa un traspaso entre fronteras de saberes tradicionalmente confinados a ciertas asignaturas que suelen ubicarse institucionalmente con una separación curricular.

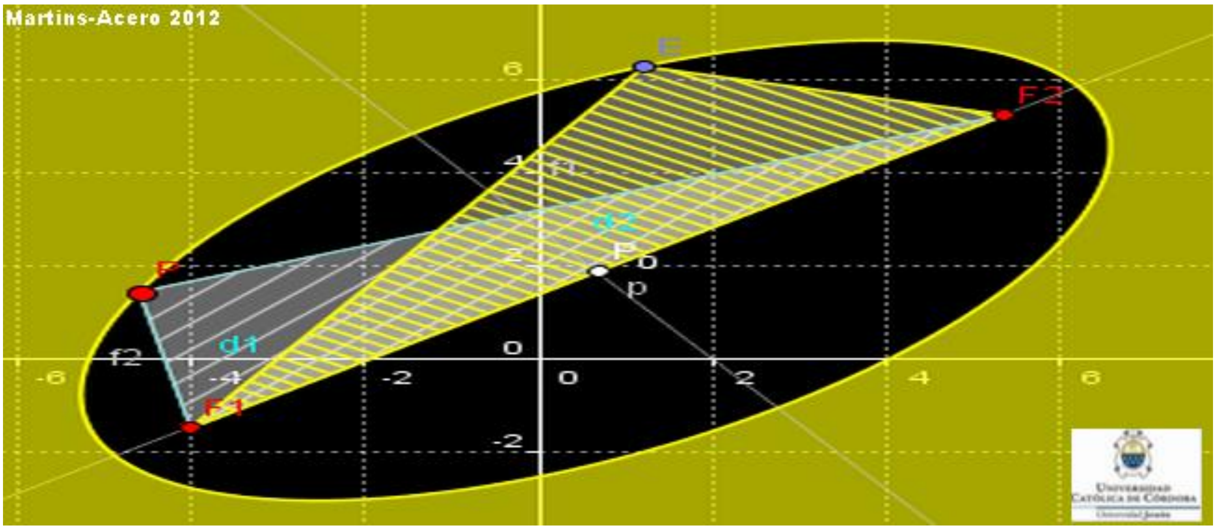



**Figura 16. Un estado del Laboratorio 5: dos triángulos que cuya base es el segmento $F_1F_2$ que une los focos de la elipse, con el tercer vértice ubicado sobre la elipse (registro gráfico)**

El laboratorio está construido de manera que la elipse en la que se inscriben los triángulos no está inicialmente visible, debiendo ser habilitada por una acción del alumno. La actividad consiste en resolver el siguiente problema. Determinar, de entre todos los triángulos que tienen por base el segmento que une los puntos $P_1 = (x_1, y_1)$, $P_2 = (x_2, y_2)$ y un perímetro fijo, determinar el de área máxima. El problema así enunciado puede considerarse de modo clásico como residente en el área del cálculo de variaciones (Elsgoltz, 1977, págs. 289, 324, 390; Bildhauer, 2003; Gelfand & Fomin, 1963, págs. 3, 39, 42-46, 48; Krasnov, Makarenko, & Kisielov, 1992, págs. 106-111; Troutman, 1996, págs. 23, 289), y tipificado como problema isoperimétrico con funcional de fronteras móviles; esta adherencia que suelen tener los tipos de problemas a segmentos específicos del recorrido curricular (Gascón, 1998, págs. 18-20) es la que puede ser debilitada –a favor de la integración– mediante artefactos como el Laboratorio 5. La fuerza del alojamiento del problema es tal que, ubicado en un curso de Cálculo Vectorial, seguramente el planteo del alumno se dará en el registro simbólico con recursos de análisis matemático, suponiendo como incógnita la posición del tercer vértice P = (x, y) que debe satisfacer tener constante el perímetro, esto es la suma de las distancias p(x, y) = d(P, $P_1$) + d(P, $P_2$) + d($P_2$, $P_1$) y hacer máxima el área, esto es la función $f(x,y) = \frac{1}{2}\left|det\begin{pmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x - x_1 & y - y_1 \end{pmatrix}\right|$, tras lo que sobrevendría la construcción de la función de Lagrange $\mathcal{L}$ (x, y, λ) $\stackrel{\text{def}}{=}$ *f*(x, y) + λ p(x, y)[14]. Sin embargo, y allí interviene el laboratorio, las actividades pretenden evaluar no una rutina de cálculo sino la interconexión de los registros; el estudiante supone que el artefacto está allí para ayudarle, lo que puede conducirlo a la respuesta más sencilla: el triángulo debe ser isósceles, con el tercer vértice en la mediatriz del segmento $P_1P_2$, para lo que basta ver que al hacer coincidir los puntos $P_1$ y $P_2$con los focos de una elipse, su misma definición permite deducir que todos los triángulos–como los dos indicados en la Figura 16– cuyo tercer vértice se halle sobre la elipse habrán de tener el mismo perímetro, ya que por definición la suma de las distancias del tercer vértice a los focos es constante. Luego, al deslizar ese tercer vértice, se cumple de modo automático la restricción de constancia del perímetro y el registro aritmético informa de modo inmediato cuál es el área del triángulo que se está produciendo. El valor máximo se observará en el momento en que el vértice móvil alcance uno de los vértices conjugados de la elipse, esto es cuando resulte un triángulo isósceles. La prueba satisfactoria en el registro simbólicose reduce a observar que, dado que la base es fija, el triángulo de área máxima es el de mayor altura, y este se tiene sii el tercer vértice del triángulo se ubica sobre el eje conjugado, de donde el triángulo es isósceles[15]. Conviene resaltar que esta solución ha sido aquí alcanzada sin *ninguna* noción que involucre el cálculo infinitesimal, y solo reclama del alumno el conocimiento de dos definiciones (triángulo, elipse) y una propiedad (el área de un triángulo), contenidos compatibles con una matemática preuniversitaria. La Figura 17 muestra una configuración que resuelve el problema.

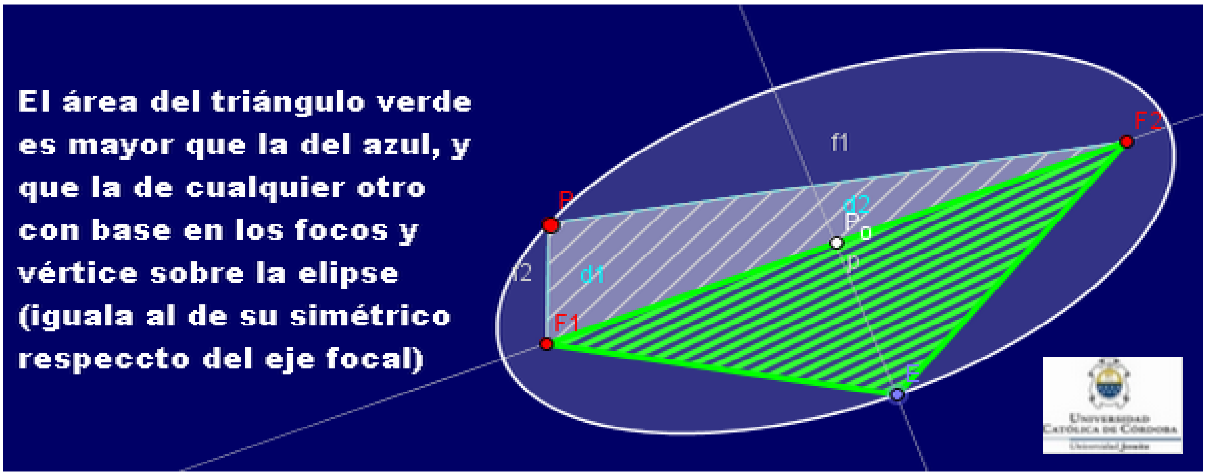



**Figura 17. Estado del Laboratorio 5 que ilustra la solución directa del problema de optimización**

Los laboratorios y las actividades presentadas para los cinco laboratorios tratados ajustan razonablemente los principios teóricos de diseño expuestos en el apartado 2, y resumidos en la Tabla 1, según se materializan como se detalla en el apartado 3, de modo especial, y a modo de ejemplo, para el laboratorio 1. Los laboratorios resultantes concentran en poco espacio una gran cantidad de información potencial. La energía potencial que cada laboratorio acumula se libera a través de las actividades, diseñadas para permitir y obligar a una penetración del concepto sujeto a evaluación desde los diversos registros semióticos apuntados en el apartado 2. La elección del software libre para su creación y su posterior incrustación del objeto en una página html le confiere la exigida accesibilidad (una vez alojado en un sitio web) desde cualquier lugar sin la necesidad de software residente por parte del usuario. El gran insumo de tiempo exigido para la preparación de un objeto digital puede ser amortizado si se tiene en cuenta que, relativamente autónomo, le permite al alumno una autoevaluación de conceptos específicos. A su utilidad como objeto para la autoevaluación se superpone su capacidad de actuar como una ayuda disponible para el alumno en la red, como un suplemento de las clases presenciales o bien como parte del material instruccional de un curso a distancia, siempre según el tipo de actividades que lo acompañe y la facilidad de acceso de la que se lo dote. La flexibilidad del diseño permite que otros profesores generen, sobre el mismo objeto digital, otras redes conceptuales para recorrer el mismo escenario. Como se ha visto en este apartado, el laboratorio 1tiene en potencia la capacidad de desplazarse con eficiencia a través de los conceptos de preservación de la convexidad a través de las transformaciones lineales, las relaciones entre medidas de los objetos originales y transformados, las nociones de inyectividad y su equivalencia con la ausencia del autovalor nulo en el espectro, los conceptos de preimagen y su relación con la nulidad de la matriz asociada, los valores singulares y el cambio de escala…

La realimentación que necesita un alumno que pretende autoevaluarse es un problema crítico que recibe aquí una respuesta satisfactoria, como lo prueban los laboratorios desarrollados, al no permitirle alcanzar la tarea propuesta a menos que pueda poner en movimiento los conocimientos de que dispone; pero además, el rasgo de interactividad y flexibilidad provocan el efecto añadido de acercar mediante pistas instantáneas las correcciones del rumbo seguido para alcanzar finalmente el estado favorable que le asegura haber construido las relaciones necesarias entre las nociones sujetas a evaluación. Para que la alfabetización digital no se reduzca a un slogan que no vaya mucho más del manejo iconográfico, resulta muy efectivo mantener una vigilancia sobre el diseño que obligue la interacción con los tres registros

La demanda de alfabetización digital que la construcción de estos laboratorios supone para los profesores se desarrolla menos en el plano de la informática que en los tiempos exigidos para alcanzar resultados confiables que ajusten los mínimos estándares. Finalmente, la transferencia del control de los aprendizajes que se propone como congruente con las exigencias de autonomía en la formación de los profesionales encuentra en los laboratorios una respuesta practicable con recursos relativamente modestos.

## 5. Bibliografía


Allen, D. (2003). A Survey of Online Mathematics Course Basics. *The College Mathematics Journal, Vol. 34, No. 4, 34*(4).

Aman, H., & Escher, J. (2008). *Analysis II* (Primera ed.). (S. Levy, & M. Cargo, Trads.) Birkhäuser: Berlín.

Apostol, T. (1980). *Calculus volumen 2. Cálculo con funciones de varias variables y álgebra lineal, con aplicaciones a las ecuaciones diferenciales y a las probabilidades* (Segunda edición en castellano [Original: Calculus II, Multi-variable calculus and linear algebra. with applications to differential equations and probabilty] ed., Vol. II). (F. Vélez Cantarell, Trad.) Reverté: Barcelona.

Armstrong, M. (2001). *Basic Topology* (Tercera edición ed.). Springer-Verlag New York: New York.

Badia, A. (octubre de 2006). Ayuda al aprendizaje con tecnología en la educación superior. *Revista de Universidad y Sociedad del Conocimiento, III*(2)

Bernstein, B. (1988a). *Clases, códigos y control. Volumen II* (Tercera ed.). Akal: Madrid.

Bildhauer, M. (2003). *Convex Variational Problems. Linear, Nearly Linear and Anisotropic Growth Conditions* (Primera ed.). Springer: Berlín.

Boyle, T. (2003). *Design principles for authoring dynamic, reusable learning objects.* Recuperado el 9 de Julio de 2009, de Australian Journal of Educational Technology, 19, 1, 46-58: http://www.ascilite.org.au/ajet/ajet19/boyle.html

Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas* (Primera edición ed.). (D. Fregona, Trad.) Libros del Zorzal: Buenos Aires.

Brunner, J. J. (2003b). La educación al encuentro de las nuevas tecnologías. En J. J. Brunner, & J. C. Tedesco, *Las nuevas tecnologías y el futuro de la educación* (Primera edición ed., págs. 15-68). IIPE-Unesco-Buenos Aires: Buenos Aires.

Butson, R. (2005). Learning objects: weapons of mass instruction. *British Journal of Educational Technology Vol 34 No 5 2003 667–669, XXXIV*(5), 667-669.

Courant, R., & John, F. (1974). *Introduction to Calculus and Analysis. Volume two* (Primera edición ed., Vol. II). New York: Wiley & Sons.

Cramer, S. (Febrero de 2007). *Update Your Classroom with Learning Objects and Twenty-First-Century Skills.* (H. Publications, Ed.) Recuperado el 26 de septiembre de 2009, de Clearing House: A Journal of Educational Strategies, Issues and Ideas, v80 n3 p126-132 Jan-Feb 2007: http://heldref.metapress.com/app/home/

Curtis, P. (1979). *Cálculo de varias variables con álgebra lineal* (Primera edición. Primera reimpresión [Original 1970: Multivariate Calculus with Linear Algebra] ed.). (M. C. Sangines de Salinas, & O. Mourut de Montppellier (revisora), Trads.) Limusa: México D. F.

Czerniewicz, L. (2001). Reflections on learning online – The hype and the reality. *South African Journal of Higher Education, 15*(3), 17-23.

Czerniewicz, L., & Brown, C. (2005). *The uses of information and communication (ICT) in teaching and learning in South African higher education practices in the Western Cape. .* Recuperado el 16 de septiembre de 2009, de Perspectives in Education, Volume 23(4), December 2005, pp. 1-18.: http://www.cet.uct.ac.za/files/KnowledgeBase/2005R

Czerniewicz, L., Ravjee, N., & Mlitwa, N. (2005). *Information and communication technologies (icts) and south african higher education: understanding/s (of) the landscape.* Recuperado el 12 de agosto de 2009, de Council on Higher Education. Chapter 4, pp.53-76.: http://www.che.ac.za/documents/d000146/6-Review_HE_SA_2007.pdf

Day, J., & Kalman, D. (1999). *Theaching linear algebra: what are the questions?* Recuperado el 21 de junio de 2008, de http://knox.knox.edu:5718/»aleahy/pcmi/

Dorier, J.-L. (2002). Teaching Linear Algbera at University. *ICM, III*(1-3), 875-884.

Duval, R. (1998). *Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. Investigaciones en matemática educativa* (Primera edicón ed.). Grupo editorial Iberoamérica: Máxico, D. F.

Elsgoltz, L. (1977). *Ecuaciones diferenciales y cálculo variacional* (Segunda edición ed.). (C. Vega, Trad.) Mir: Moscú.

Engelbrecht, J., & Harding, A. (2005a). *Teaching undergraduate mathematics on the Internet. Part 1: Technologies and taxonomy».* Recuperado el 14 de junio de 2009, de Educational Studies in Mathematics. Vol. 58, n.º 2, pág. 235-252.: http://www.springerlink.com/content/g813211q40551v29/

Engelbrecht, J., & Harding, A. (2005b). *Teaching undergraduate mathematics on the Internet. Part 2: Attributes and Possibilities.* Recuperado el 14 de juni0 de 2009, de Educational Studies in Mathematics. Vol. 58, n.º 2, pág. 235-252.: http://www.springerlink.com/content/g813211q40551v29/

Flanigan, F., & Kazdan, J. (1975). *Cálculo dos: funciones lineales y no lineales* (Primera edición en español. (E. d. Feder, Trad.) Cecsa: México D.F.

Fraleigh, J., & Beauregard, R. (1990). *Linear Algebra* (Primera edición ed.). Addison Wesley New York:.

Gascón, J. (1998). Evolución de la didáctica de las matemáticas como disciplina científica. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 18/1*(52), 7-33.

Gelfand, I., & Fomin, S. (1963). *Calculus of Variations* (Primera ed.). (R. Silverman, Trad.) Prentice Hall: Englewood Cliff.

Gutiérrez Martín, A. (2003). *Alfabetización digital. Algo más que ratones y teclas* (Primera edición ed.). Gedisa: Barcelona.

Heck, A., Boon, P., & van Velthoven, W. (2008). *Mathematica Empowered Applets for Learning School Algebra and Calculus.* Recuperado el 14 de noviembre de 2009, de Proceedings of the 9th International Mathematica Symposium (IMS'08). The Mathematica Journal volume. pp. 1-21.: http://staff.science.uva.nl/~heck/research/art/IMS%202008%20Paper.pdf

Hoffman, K. (1975). *Analysis in Euclidean Space* (Sexta ed.). Prentice Hall: Englewood Cliffs, New Jersey.

Hoffman, K., & Kunze, R. (1991). *Álgebra lineal* (Segunda edición ed.). (H. Finsterbusch, Trad.) Prentice Hall: México D. F.

Jessup, S. (2007). *Processes used by instructional designers to create elearning and learning objects.* Recuperado el 14 de octubre de 2009, de A Dissertation Presented in Partial Fulfillment Of the Requirements for the Degree Doctor of Philosophy. Capella University.pp. 1-130.: http://www.dgdocph.cpu/ddhj/pro/jes.pdf

Kalman, D. (2005). *Virtual Empirical Investigation: Concept Formation and Theory Justification.* Recuperado el 20 de junio de 2009, de American Mathematical Monthly 112, no. 9 (November 2005): 786-798. Academic Search Complete, EBSCOhost: http://search.ebscohost.com/login.aspx?direct=true&db=a9h&AN=18926322&lang=es&site=ehost-live

Kay, R., & Knaack, L. (2009). *Evaluating the learning in learning objects.* Recuperado el 27 de septiembre de 2009, de Open Learning. Vol. 22, N. 1, February 2007, pp. 5-28.Academic Search Complete, EBSCOhost : http://search.ebscohost.com/login.aspx?direct=true&db=a9h&AN=24078579&lang=es&site=ehost-live

Krasnov, M., Makarenko, G., & Kisielov, A. (1992). *Cálculo Variacional* (Primera edición en español ed.). (C. Vega, Trad.) Mir-Rubiños: Moscú-Madrid.

Kudriávtsev, L. D. (1983). *Curso de análisis matemático. Tomo I.* (Primera edición ed., Vol. I). (V. Fernández, Trad.) Mir: Moscú.

Lang, S. (1976). *Cálculo II* (Primera edición ed.). (H. Pereyra, Trad.) México D. F.: Fondo educativo interamericano.

Litwin, E. (2003). La evaluación: campo de controversias o un nuevo lugar. En A. R. Camilloni, S. Celman, E. Litwin, & M. d. Palou de Maté, *La evaluación de los aprendizajes en el debate didáctico contemporáneo* (Primera edición. Cuarta reimpresión ed., págs. 11-34). Paidós Buenos Aires.

Luenberger, D. (1989). *Programación lineal y no lineal* (Primera edición [Original 1984, Linear and Nonlinear Progrmming] ed.). (M. López Mateos, M. Garrido, & J. López, Trads.) Addison-Wesley Wilmington, Delaware.

Miller, H., & Upton, D. (2008). *Computer Manipulatives in an Ordinary Differential Equations Course: Development, Implementation, and Assessment.* Recuperado el 27 de septiembre de 2009, de Journal of Science Education and Technology, v17 n2 p124-137 Apr 2008. DataBaseERIC: http://www.jstor.org/

Moreau, I. (2002). *De véritables simulations accessibles en ligne pour l'enseignement des sciences et des techniques 'applet learning.* Recuperado el 21 de junio de 2008, de Centre d'Electronique et de Micro-Optoélectronique, Courrier 084 - Université Montpellier II.

Pluvinage, F. (1998). *Los objetos matemáticos en la adquisición de los conocimientos. Investigaciones en Matemática Educativa.* Iberoamérica: México D. F.

Pozo, J. I., & Mateos, M. (2009). Aprender a aprender: Hacia una gestión autónoma y metacognitiva del aprendizaje. En J. I. Pozo, & M. Puy Pérez Echeverría (Edits.), *Psicología del aprendizaje universitario: La formación en competencias* (Primera edición ed., págs. 54-69). Morata: Madrid.

Pozo, J. I., & Monereo, C. (2009). Introducción: La nueva cultura del aprendizaje universitario o por qué cambiar nuestras formas de enseñar y aprender. En J. I. Pozo, & M. Puy Pérez Echeverría (Edits.), *Psicología del aprendizaje universitario: La formación en competencias* (Primera edición ed., págs. 9-28). Morata Madrid.

Rey Pastor, J., Pi Calleja, P., & Trejo, C. (1968). *Análisis Matemático II. Cálculo infinitesimal de varias variables. Aplicaciones* (Séptima edición ed., Vol. II). Kapelusz Buenos Aires.

Santaló, L. (1993). *Vectores y tensores con sus aplicaciones* (Décimocuarta edición ed.). Eudeba: Buenos Aires.

Silva, M. (2005). *Educación interactiva. Enseñanza y aprendizaje presencial y on-line.* (Primera edición ed.). Gedisa: Barcelona.

Tedesco, J. C. (2009). *Educar en la sociedad del conocimiento* (Segunda edición ed.). Buenos Aires: Fondo de cultura económica.

Troutman, J. L. (1996). *Variational calculus with elementary convexity* (Primera edición ed.). New York: Springer-Verlag.

UNESCO. (2002). *Information and Communication Technologies in Teacher Education. A Planning Guide* (Primera ed.). Paris: Unesco. Division of Higher Education Press.

UNESCO. (2006). *Using ICT to Develop Literacy.* Bangkok: United Nations Educational, Scientific and Cultural Organization.

Walsh, K. (2006). *Object-Oriented faculty development: training teachers with learning objects.* Recuperado el 10 de septiembre de 2009, de Thesis for the Degree Doctor of Philosophy, pp. 1-114, Capella University: http://www.jstor.org

Wiley, D. A. (2001). *Connecting learning objects to instructional design theory: a definition, a metaphor and a taxonomy.* Recuperado el 8 de Julio de 2009, de The instructional use of learning objects, Association for Educational Communications and Technology: http://www.elearning-reviews.org/topics/technology/learning-objects/2001-wiley-learning-objects-instructional-design-theory/

Zschocke, T. (2002). *Intructional web sites design: a object-oriented approach.* Recuperado el 07 de junio de 2008, de Thesis for Degree Doctor of Education, pp. 1-503. Unnivesität zu köln, Cologne, Germany.: http://www.jstor.org

**Notas**

[1]Guy Brousseau en su capítulo dedicado a la modelización de las situaciones en didáctica ha denominado 'situación' a "un modelo de interacción entre un sujeto y un medio determinado. El recurso de que dispone el sujeto para alcanzar o conservar en este medio un estado favorable es una gama de decisiones que dependen del uso de un conocimiento preciso. Consideramos el medio como un subsistema autónomo, antagonista del sujeto" (Brousseau, 2007, pág. 17).

[2]La definición que de estas tecnologías se utiliza en este trabajo es la ampliamente difundida y casi parejamente aceptada, dada por la UNESCO: The term, *information and communication technologies* (ICT), refers to forms of technology that are used to transmit, store, create, share or exchange information. This broad definition of ICT includes such technologies as: radio, television, video, DVD, telephone (both fixed line and mobile phones), satellite systems, computer and network hardware and software; as well as the equipment and services associated with these technologies, such as videoconferencing and electronic mail.(UNESCO, Using ICT to Develop Literacy, 2006, pág. 14).

[3]No pocos autores cuestionan que pueda hablarse de la sociedad del conocimiento como una realidad en la que ya se estuviera instalado: “el conocimiento, para la mayoría de los ciudadanos, e incluso para buena parte de los profesionales formados en la universidad, es más un deseo que una realidad. Parece más ajustado decir que vivimos en la sociedad de la información, pero aún no en la del conocimiento, tal como estamos sometidos a una avalancha de informaciones cruzadas, a veces contradictorias o difícilmente compatibles, a la que resulta muy difícil dar sentido” (Pozo & Monereo, 2009, págs. 13-14).

[4]El uso todavía no ha sancionado aún una definición común aceptada por todos los investigadores para estos objetos flexibles que permiten el aprendizaje de segmentos de conocimiento que pueden ser utilizados por una variedad de usuarios en una diversidad de contextos de aprendizaje, y que el profesor integra y recombina los segmentos de acuerdo a sus propósitos de enseñanza. La lista siguiente permite, sin embargo, deducir sus notas esenciales: “cualquier recurso que pueda ser reutilizado como ayuda del aprendizaje” (Wiley, 2001, pág. 5),“herramientas interactivas en web que permiten el aprendizaje de conceptos específicos para ampliar, potenciar y guiar los procesos cognitivos de los aprendices” (Kay y Knaack 2007, 6); “material al que puede accederse desde la red, diseñado para ilustrar, complementar o asistir el aprendizaje de diversos usuarios en variadas localizaciones” (Cramer, 2007, 127); “un segmento de información digitalizado, reutilizable y accesible desde la red” (Walsh, 2006).

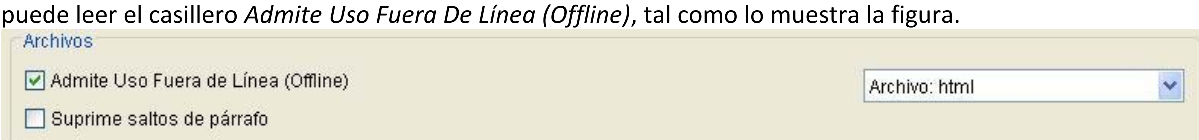
[5]En efecto, para dos cualesquiera vectores u, v, linealmente independientes en $\mathbb{R}^2$ basta considerarlos una base ortonormal para tener definido el producto interno $(x, y) \overset{def}{=} C_B(x)^T C_B(y)$ que logra la ortogonalidad entre u y v, donde con $C_B(x)$, $C_B(y)$ se indica la matriz de coordenadas de los vectores x e y respecto a la base B ={ u, v}. Pero como la longitud misma de los vectores misma está libre, la expresión $(x, y) \overset{def}{=} C_B(x)^T\ G_B\ C_B(y)$ es también un producto interno que logra la ortogonalidad entre u, v, mientras la matriz $G_B$ sea diagonal con elementos positivos arbitrarios en su diagonal principal.

[6] GeoGebra - DynamicMathematicsforEveryone. Copyright 2001-2009 GeoGebra Inc. La aplicación puede descargarse en forma libre del sitio http://www.geogebra.org/, donde se detallan las condiciones de uso. License: You are free tocopy, distribute and transmit GeoGebra free of chargefor non-commercialpurposes). PROJECT DIRECTOR: MarkusHohenwarter (Austria & USA 2001-), LEAD DEVELOPER: Michael Borcherds (UK 2007-), DEVELOPERS: GaborAncsin (Hungary 2009-), MathieuBlossier (France 2008-), CalixteDenizet (France 2010-), Arpad Fekete (Hungary 2010-), ZbynekKonecny (CzechRepublic 2010-), ZoltanKovacs (Hungary 2010-), Yves Kreis (Luxembourg 2005-), FlorianSonner (Germany 2008-), George Sturr (USA 2009-), Hans-PetterUlven (Norway 2008-).

[7]Una de las utilizadas en este trabajo son tomadas del sitio del profesor David Eck:Java Components for Mathematics(JCM).

[8]Al seleccionar uno cualquiera de los iconos una breve explicación hace su aparición en el espacio libre de la barra de herramientas, como se muestra en la figura, donde ante la selección del símbolo de una circunferencia y un punto aparece la instrucción de que debe indicarse dos elementos para que el comando construya la circunferencia: el centro y un punto por el que pasa (por ejemplo, con sendos clics del mouse). Si la explicación no resultara suficiente, la Ayuda del menú amplía la breve instrucción incluyendo un ejemplo.


[9]Es esencial, para que la página web así creada funcione de modo interactivo, que se incluyan una serie de archivos auxiliares, archivos que contienen el código de programación (Java). Para que el programa mismo genere estos archivos acompañando al archivo html debe asegurarse que se halle tildada la correspondiente opción, que se encuentra en la misma pantalla *Exporta como Página Web*, en la pestaña *Avanzado*, donde se puede leer el casillero *Admite Uso Fuera De Línea (Offline)*, tal como lo muestra la figura.



Una vez aceptada la exportación (de la página html y todos sus archivos auxiliares añadidos automáticamente) a una carpeta con un nombre dado, se tiene finalmente el laboratorio virtual listo para ser utilizado por cualquier alumno, disponga o no de GeoGebra en su hardware.

[10]Esta opción se encuentra sin tildar en la configuración predeterminada tal como es descargada originalmente.

[11]Este laboratorio fue construido como parte de un proyecto de la Facultad de Ingeniería de la Universidad de Buenos Aires para generar recursos digitales en red. En el proyecto intervinieron el Ing. Nicolás Patetta (Dirección), el Lic. Jorge Comas, y el Ing. Fernando Acero. El Laboratorio mismo es una configuración del sitio del profesor David Eck:Java Components for Mathematics, incrustada en una página html con actividades diseñada por los autores.

[12]Un ejemplo de material así organizado es el siguiente texto, fragmento del preparado especialmente para el apartado de curvas: La sencilla pregunta ¿qué es una curva? merecería como respuesta una definición inequívoca que fuera igualmente aceptada de buen grado por todos. No es así, en realidad. De allí estas observaciones. La primera observación: hay al menos dos 'bandos' con sus correspondientes seguidores en lo que conviene adoptar como definición de curva. Uno de ellos, considera la curva como un conjunto de puntos en un espacio, con alguna especificación adicional. El otro, prefiere reservar el nombre para una función vectorial con alguna especificación adicional. Los primeros, al referirse a la curva $y = x^2$, piensan en el conjunto $C = \{(x, y)\subset R^2 : y = x^2\}$. Los segundos dirán en cambio que la curva es la función vectorial $\gamma: R \rightarrow R$ tal que $\gamma(t) = (t, t^2)$. Los primeros dirán que no, que la curva C es, en todo caso, la imagen de la función γ, y escribirán $C = Im(\gamma)$. La primera visión está ligada a cierto 'tradicionalismo', con su apogeo a principios del siglo XX. Fue el matemático Camille Jordan quien, en el siglo XIX dió una definición en estos términos: se llama curva continua en el espacio euclídeo V (o, para el caso, afín) de dimensión n a la función vectorial continua $\gamma: [a, b] \rightarrow V$, $a < b$. Los que prefieren reservar la denominación de curva para la función vectorial tienen muy buenas razones para ello, pero no las exponemos aquí. Ellos consideran que definir una curva como imagen de una función vectorial es absolutamente incorrecto por una multitud de razones [Postnikov, M. Leçons de géométrie. Algèbrelinéaire et géométriedifférentielle. Primera edición en francés, primera reimpresión. Traducido por Irina Pétrova. Moscú: Mir, 1988, Leçon 23, p.199]. Una de las dificultades, no menor, es que debe precisarse qué se entiende cuando se dice que una curva considerada como un conjunto de puntos es continua, o diferenciable, o inyectiva: es claro que esos términos sólo pueden predicarse de las funciones, no de los conjuntos. Jordan creía que la continuidad de la función gamma era suficiente para captar la idea intuitiva de una curva como 'línea con medida nula'. Esta conjetura se hizo añicos con la construcción de Peano hacia 1890: una curva continua cuya imagen llenaba todo un cuadrado!; el extraño objeto tuvo pronto clones, como el creado por Hilbert al año siguiente. [Cf. Hairer, Ernst, y G. Wanner. AnalysisbyitsHistory. Primera edición. New York: Spinger-Verlag, 1996, IV, §2, pp291 ss.]. La continuidad no bastaba. Se añadió la diferenciabilidad, pero eso exige una definición: la función vectorial γ es diferenciable en el intervalo cerrado $I = [a, b]$ sii existe un abierto A que contiene a I, y una función Γ diferenciable en A que coincide con γ en el intervalo cerrado I.

[13]El campo escalar *f* presenta en el origen de coordenadas un discontinuidad esencial, como lo prueba de inmediato el hecho de que todas las curvas de nivel con k no negativo concurran en ese punto. Esta correspondencia entre discontinuidad esencial y singularidad de comportamientos de los conjuntos de nivel es explotado también con ventaja en 3D, generando actividades con campos escalares cuyos conjuntos de nivel recorren diversos géneros (y degeneramientos) de las cuádricas. La posibilidad de integración se da también, de un modo natural, introduciendo actividades que involucren un registro gráfico del cálculo de áreas de las regiones encerradas por curvas de nivel en 2D o de porciones de superficies de nivel en 3D.

[14]La función así construida es continua en todo el espacio $R^3$, aunque no es diferenciable en las rectas del espacio dadas por $(x_1, y_1, \lambda)$, $(x_2, y_2, \lambda)$, con $\lambda\in\mathbb{R}$, lo que no supondría un obstáculo considerando que en tal caso el punto P se ubicaría sobre uno de los vértices, degenerando el triángulo en un segmento de área nula, y entonces no máxima. Por supuesto que se sobrentiende en todo esto que el valor constante del perímetro dado es mayor que el doble de la distancia entre $P_1$, $P_2$.

[15]La última parte del párrafo es necesaria, el artefacto no alcanza para responder el problema, si se considera que el tercer vértice es, en realidad, un punto que se desplaza sobre una cuadrícula de $n\times n$ cuadrados ($n = 10^3$ para este artefacto), de modo que sus coordenadas rara vez acertarán a coincidir con las del punto más próximo de la elipse sobre la que pretende deslizarse. Esto tiene un inmediato impacto sobre el área informada en el registro aritmético, que puede ser insignificante cuando se trata de aproximar un valor, pero es crucial cuando se trata de compararlo con los valores próximos, que es precisamente en lo que consiste el problema.