

Análisis y valoración del aprendizaje del concepto de límite funcional en alumnos de las carreras de ingeniería a través de la investigación acción

Autor/es: GATICA, Nora; nimberti@fices.unsl.edu.ar

ORTEGA, Tomás

BLAZQUEZ, Sonsoles

Institución de procedencia: Universidad Nacional de San Luis (Argentina), Universidad de Valladolid (España)

Eje temático: Diseños metodológicos de la investigación educativa desde la investigación acción

Palabras clave: alumnos de Ingeniería – matemática - límite funcional

Abstract

Los alumnos de las carreras de Ingeniería, presentan serias dificultades cuando se les enseña y tratan de aprender la noción de límite de una función; este hecho que ha sido descubierto en el ejercicio de nuestra profesión como profesores de Análisis matemático I, ha sido ampliamente comprobado en nuestra investigación. Este concepto, a pesar de ser muy abstracto, está presente en varios aspectos de la vida real, que no son triviales, es fundamental para el aprendizaje de otros conceptos de la asignatura, están muy lejos de comprender el concepto. Se trata de una conceptualización de *pensamiento matemático avanzado* que requiere altos niveles de abstracción, su aprendizaje no puede reducirse a una mera memorización de la definición del concepto, la que fácilmente es olvidable, ya que no tienen una interpretación funcional de la misma, presumiblemente, por la falta de articulaciones entre varios registros.

El presente trabajo se refiere a los resultados que se han establecido al analizar los datos recabados en cada uno de los tres ciclos de investigación utilizando la metodología cualitativa de investigación acción. En cada uno de ellos se concibieron y se pusieron en práctica sus fases: planificación, acción, observación y reflexión.

Entre las conclusiones destacamos las enormes dificultades que tienen los alumnos para la comprensión de este concepto, en cualquier registro. Igualmente establecemos que favorece la comprensión del concepto, el estudiar primeramente la definición como aproximación óptima

(Blazquez & Ortega, 1999) para luego poder interpretar el formalismo y simbología de la definición métrica.

Introducción

Una de las primeras materias que se encuentra el ingresante a las carreras de Ingeniería es Análisis Matemático I.

Esta asignatura es básica y sirve como herramienta para otras materias de la especialidad, en donde se deben modelar y resolver problemas de ingeniería. La motivación y los conocimientos matemáticos en estos alumnos son diferentes a los que, por ejemplo, se estudian en la Licenciatura de Matemáticas.

Se hace necesario, entonces, diseñar su enseñanza no para la simple acumulación de conocimientos, sino para que contribuya a construir formas de pensamiento y de adquisición de saberes en los que se aseguren las relaciones con los ya estudiados y que permita la aplicación de métodos generales. En tal sentido, resulta imprescindible realizar transformaciones en la enseñanza tradicional.

A través de nuestra experiencia como docentes de la asignatura Análisis Matemático I, de las carreras de Ingeniería, hemos comprobado las dificultades que los alumnos presentan cuando se les enseña y tratan de aprender la noción de límite de una función. Este concepto, a pesar de ser muy abstracto, está presente en varios aspectos de la vida real, que no son triviales, y es fundamental para otros temas de la asignatura tales como derivadas, integrales, etcétera; y aunque los alumnos saben como resolver ejercicios tipo cálculo, están muy lejos de comprender el concepto.

Aun cuando logran superar la materia con un buen rendimiento en muchos casos, fracasan o no tienen buen desempeño al desarrollar actividades en materias posteriores que requieran de la reflexión y del uso adecuado de esta noción. La resolución de problemas es pobre cuando estos alumnos se enfrentan situaciones nuevas; sobre todo en aquellas que no indican expresamente la acción que deben realizar.

En cuanto a su enseñanza, el tratamiento que se ha seguido antes de esta investigación, es básicamente “tradicional”, se les explicaba la definición con los teoremas correspondientes, para luego enfrentarlos a ejercicios algorítmicos, en donde sólo debían encontrar el valor de distintos límites, aplicando los teoremas estudiados y realizando transformaciones en las funciones, de manera que en estas últimas sea posible la sustitución directa y encontrar los valores de los límites. De esta manera es como sugieren su enseñanza en los libros de texto.

De acuerdo con Contreras (2000) al desarrollar un tema de Análisis, un profesor se enfrenta a conceptos que por su propia naturaleza son problemáticos en sí mismo, lo que hace desplazarse hacia posturas algorítmicas, más fáciles de gestionar y evaluar, dejando de lado los problemas característicos de dicha asignatura. De la misma manera Artigue (1995) establece que se ha comprobado que la enseñanza tradicional tiende a centrarse en una práctica algorítmica y algebraica, y a evaluar sólo las competencias adquiridas en este dominio. De esta manera, los distintos temas que se desarrollan, dependen de las definiciones matemáticas de los objetos, perdiéndose el valor que tienen las conversiones entre registros para los aprendizajes, debido que no se exploran de manera consistente las actividades que favorecerían su articulación con otros medios de expresión y representación matemática que utilicen el uso simultaneo de varios registros de representación semiótica.

Esta situación se agudiza en los alumnos de Ingeniería, ya que el uso que se da a los conceptos matemáticos como modelos cumple con objetivos muy diferentes: por un lado, en los procesos de resolución se requiere implementar métodos numéricos de cálculo y también gráficos para la representación del problema; y, por otro, cuando se tiene una solución algebraica, el principal interés reside en interpretar el resultado implícito de dicha solución.

También es importante reseñar que estos temas se tratan cuando el alumno ha ingresado recientemente en la Universidad. En este momento debe afrontar los problemas propios de la articulación entre la escuela media y superior, que inciden notablemente en el aprendizaje de temas de Análisis Matemático, asignatura que tiene que enfrentar el primer año de ingreso en la Universidad, y, por tanto, necesita disponer de un dominio adecuado de los conocimientos y habilidades básicas, propias de la escuela media, para poder superar los futuros obstáculos.

Por tratarse de una noción que requiere altos niveles de abstracción, su aprendizaje se reduce a una mera memorización de la definición del concepto, la que fácilmente es olvidable, ya que no tienen una interpretación funcional de la misma, presumiblemente, por la falta de articulaciones entre varios registros. Sin embargo, pueden realizar el cálculo correspondiente sin mayores (o con ciertas) dificultades.

Los estudiantes de las carreras de Ingeniería tienen el convencimiento de que sólo les interesan las matemáticas que tienen aplicaciones directas y, por tanto, el concepto de límite, tal y como se viene enseñando en los estudios de Ingeniería, les resulta demasiado árido, no saben aplicarlo ni a situaciones problema ni a nuevos planteamientos matemáticos, y ni siquiera tienen la habilidad de establecer conexiones con el cálculo de límites. Pensamos que la enseñanza tradicional, que se limita a la conceptualización métrica y al cálculo, no tiene

sentido hoy en día, ya que el concepto, por una parte, casi nunca se logra aprender y parece que al cabo de un año casi ningún alumno es capaz de recordarlo y, por otra, carece de sentido invertir demasiado tiempo lectivo en que los alumnos aprendan el cálculo de límites (que también es posible que lo olvidan con facilidad) cuando el ordenador puede hacer estas tareas que, ciertamente, no aportan conocimiento alguno.

En la tesis doctoral de la Dra. Blázquez, “*Noción de límite en Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales* (Blázquez, 1999)”, dirigida por el Dr. Ortega, entre otras muchas cosas, se constató, que los alumnos son capaces de memorizar la definición y también hacer ejercicios de cálculos de límites, utilizando ciertas técnicas sencillas, pero están muy lejos de comprender la noción y de aplicarla a situaciones teórico-práctica. La conceptualización métrica de límite funcional, que es la que se utiliza en la docencia universitaria, se muestra extremadamente compleja y en la tesis de Blázquez se acuña una nueva, que está basada en la idea de aproximación numérica. En esta conceptualización se evita el formalismo notacional que tan problemático resulta para los alumnos.

Tomando como referencia las investigaciones realizadas por otros autores y muy especialmente la tesis de Blázquez, se desarrolló este estudio. Se planificaron, desarrollaron y analizaron tres ciclos de investigación (ciclo exploratorio, confirmatorio y de cierre), estableciéndose los cambios necesarios de acuerdo a las reflexiones observadas en cada ciclo.

En nuestra investigación, se utilizó una orientación didáctica basada en la nueva conceptualización, trabajando los registros numéricos, gráficos, verbales y simbólicos, y las conversiones entre ellos; ahondando en planteamientos controvertidos que tengan que ver con el concepto, y dejando que el ordenador realice los cálculos correspondientes. Se trabajó en forma experimental con los alumnos de las carreras de Ingeniería de la Facultad de Ingeniería y Ciencias Económica Sociales de la Universidad Nacional de San Luis (Argentina), aplicándose una metodología cualitativa y considerándose los marcos teóricos: *Registros de Representación Semiótica* de Raymond Duval, *Actos de Comprensión* de Sierpinska y la *Socioepistemología* de Cantoral para determinar qué y como aprenden estos alumnos.

La investigación que se ha desarrollado es eminentemente práctica y, por tanto, en ella son importantes las consideraciones de tipo contextual y especialmente la experimentación.

En primer lugar analizamos y realizamos cambios curriculares en la asignatura con el objetivo de investigar cómo se producen los aprendizajes del concepto de límite basados en la conceptualización acuñada en la tesis de Blázquez, que está fundamentada en el concepto de

aproximación óptima, frente a los aprendizajes basados en la conceptualización métrica, siempre bajo la convicción de que las actividades de conversión de registros favorece el aprendizaje de los alumnos.

Nuestra conjetura inicial, que luego fue constatada en la investigación, se refiere a que los alumnos aprenden con menos dificultad la primera conceptualización; con ella se sienten más motivados y prefieren trabajar con ella.

REFERENTES TEÓRICOS – CONCEPTUALES

Nuestra investigación se encuadra en la ciencia denominada Didáctica de la Matemática. Esta ciencia, entre otras problemáticas, estudia los procesos de transmisión y adquisición de los diferentes contenidos matemáticos en situación escolar en todos los niveles educativos. Según Farfán (2001), una orientación consiste en describir y explicar los fenómenos relativos a las relaciones entre enseñanza y aprendizaje. No sólo se trata de encontrar “una buena manera de enseñar” un concepto determinado, sino que también debe ocuparse de la organización de una actividad, cuya intención sea el aprendizaje de un cierto saber.

Brousseau (1986) establece que en toda situación de enseñanza existe un conjunto de relaciones establecidas explícita y/o implícitamente entre un alumno o un grupo de alumnos, un cierto medio (que comprende eventualmente instrumentos y objetos) y un sistema educativo (representado por el profesor) con la finalidad de lograr que estos alumnos se apropien de un saber constituido o en vías de constitución.

Pero no únicamente se debe tener en cuenta este conjunto de relaciones sino que, por otro lado, siguiendo a Schoenfeld (1987), a pesar de toda la complejidad de las situaciones de enseñanza - aprendizaje, las estructuras mentales de los alumnos pueden ser comprendidas, y tal comprensión ayudará a conocer mejor los modos en que el pensamiento creativo y el aprendizaje tiene lugar.

Estos planteamientos requieren situar a la Didáctica de la Matemática dentro de las interacciones entre múltiples disciplinas: Psicología, Pedagogía, Sociología, Matemáticas, etc. La psicología se interesa, no solamente, por el aprendizaje, en lo que respecta en comprender el fenómeno mental que interviene en éste, sino también, por la adquisición de los conceptos y por la relación existente entre razonamiento y aprendizaje. El enfoque psicológico intenta comprender que hacen los alumnos cuando se encuentran frente a las matemáticas. Se asume que el aprendizaje de las matemáticas tiene su propia psicología, que los estudiantes y profesores tienen ideas propias acerca de las matemáticas en situaciones de aprendizaje y que

los profesores estarán mejor equipados para su tarea si pueden comprender como se ven las matemáticas desde la perspectiva del que aprende.

Desde este punto de vista, la psicología cognitiva postula que la mente opera con representaciones mentales. Un modelo del representacionalismo se suele relacionar con la metáfora del espejo, donde se supone que existe una serie de objetos del mundo real que se reflejan en la mente de las personas (Font, 2000).

De acuerdo a esto, no es posible estudiar los fenómenos relativos al conocimiento sin recurrir a la noción de representación. La representación ha sido, y es, el centro de toda reflexión que se preocupa por las cuestiones que tienen que ver con la comprensión de un conocimiento, y, en la actualidad, desde esta perspectiva, se considera que no hay conocimiento sin una actividad de representación.

.Las representaciones en didáctica de la matemática

Una investigación que requiera una experimentación en el aula con alumnos regulares de un curso reglado, tiene que tener en cuenta la disposición e intervención del alumnado y tiene que contemplar un guión de trabajo que difiere de los guiones establecidos en el reglamento, por tanto, es necesario establecer un contrato didáctico con los alumnos, para que cada una de las partes contrayentes tengan en cuenta sus reglas de juego, ya que la dinámica de aula, las tareas van a ser diferentes.

Desde la perspectiva del alumno, las representaciones y la semiótica, y su relación con distintas formas de conocimiento se han convertido en elementos importantes en el estudio de la comprensión y se han consolidado como una herramienta útil a tal efecto.

Esto se debe a que los objetos matemáticos no son directamente accesibles a la percepción como son los objetos físicos y culturales, ya que al tratarse de abstracciones, son necesarias las representaciones. Entender un concepto significa tener una imagen del concepto (Pluvinage, 1998).

En el campo de la didáctica de la matemática, se han realizado muchas investigaciones para precisar el término “representación” y para estudiar el papel que juegan las diferentes representaciones en el proceso de comprensión de los contenidos matemáticos. La mayoría está de acuerdo en que la naturaleza de las representaciones matemáticas influye en el tipo de comprensión que genera el alumno y recíprocamente, el tipo de comprensión que tiene el alumno determina el tipo de representación que puede generar o utilizar.

El punto de vista de R. Duval

Debido a que los objetos matemáticos no son directamente accesibles a la percepción, Duval (1998) enfatiza la importancia de la *representación* en Matemáticas, estableciendo que no es posible estudiar los fenómenos relativos al conocimiento sin recurrir a ella.

Este autor establece que, en matemáticas, las representaciones semióticas no sólo son indispensables para fines de comunicación sino que también son necesarias para el desarrollo de la actividad matemática misma, ya que es posible efectuar tratamientos sobre los objetos matemáticos y de realizar conversiones entre registros. El progreso de los conocimientos se acompaña siempre de la creación y del desarrollo de sistemas semióticos nuevos y específicos.

Los actos de comprensión de A. Sierpiska

En nuestra investigación se analizó la comprensión adquirida por los alumnos en relación con el concepto de límite, considerando el modelo teórico sobre los actos de comprensión de A. Sierpiska (1990).

Esta autora propone cuatro categorías de actos de comprensión:

Identificación: Consiste en una percepción repentina de objetos relacionados con el concepto en cuestión o la identificación de un término como poseedor de un estatus científico.

Discriminación: Este acto consiste en la diferenciación entre dos objetos, propiedades o ideas que se confundían antes.

Generalización: Se refiere a darse cuenta de que algunas condiciones no son esenciales o de las posibilidades de extender el rango de aplicaciones.

Síntesis: Consiste en adquirir relaciones entre dos o más propiedades, hechos u objetos y organizados en un todo consistente.

Consideramos que el discernimiento de los actos de comprensión involucrados en las actividades, tareas, ejercicios, etc. desarrolladas en esta investigación, nos ayudó al momento de analizar la comprensión de los alumnos sobre los mismos.

La socioepistemología

Desde la década de los años 90, un grupo de investigadores de México (Cantoral, 2003; Cantoral y Farfán, 2004; entre otros), vienen desarrollando estudios donde, desde la perspectiva de la construcción social del conocimiento, estas investigaciones toman como referente la dimensión epistemológica y, fundamentalmente estudia las circunstancias que permiten construir el conocimiento como respuesta a los aspectos sociales y culturales de la época, como motores creativos, y de las instituciones en las que se produce la formación.

El objeto de estudio de este marco teórico es la socioepistemología de los saberes matemáticos, incluyendo el aspecto cognitivo del alumno, con el propósito de elaborar propuestas de enseñanza que traten sobre el *qué* enseñar y el *cómo* enseñar, tal y como se venía realizando habitualmente.

Con esta perspectiva, este grupo considera una aproximación sistémica de la construcción del conocimiento a la que llaman “acercamiento epistemológico”. En ella, profundizan desde lo que consideran sus cuatro componentes fundamentales: la naturaleza epistemológica, la dimensión socio-cultural, los planes de lo cognitivo y los modos de transmisión vía la enseñanza.

ASPECTOS METODOLÓGICOS

Como la finalidad principal de esta investigación fue la acción educativa, centrada en la búsqueda de soluciones, y así lograr el mejoramiento en la enseñanza, resolviendo los problemas educativos que día a día se presentan en el aula, se buscó una metodología en la que el docente, los alumnos y todos los agentes del proceso educativo se impliquen en la investigación. Cuando ésta se realiza mediante un proceso experimental de la propia práctica docente, la mejora de la calidad de la enseñanza tiene muchas posibilidades de éxito.

La investigación-acción

El concepto de investigación-acción tiene sus orígenes en los años cuarenta en la obra del psicólogo Kurt Lewin que lo aplicó en una serie de experimentos en Norteamérica en contextos sociales muy diferentes. En los últimos años se ha ido desarrollando en distintos países, incluido España, en un contexto de colaboración entre investigadores y profesores para la mejora del currículo.

La investigación-acción según Kemmis y McTaggart (1988; p. 9) es *"una forma de indagación introspectiva colectiva emprendida por participantes en situaciones sociales con objeto de mejorar la racionalidad y la justicia de sus prácticas sociales y educativas, así como su comprensión de esas prácticas y de las situaciones en que éstas tienen lugar"*. Elliot (1990; p. 23) la describe no sólo como reflexión sobre la práctica, sino como *"reflexión relacionada con el diagnóstico"*, es decir, la investigación-acción no se preocupa básicamente de resolver problemas sino de plantearlos y mejorar la práctica educativa a través de los efectos de los cambios conseguidos. Sigue, por tanto, una tradición interpretativa, fenomenológica de la investigación social.

Algunas de las características de la investigación-acción señaladas por Pérez (1994) nos sirven para justificar el hecho de adoptar esta metodología:

- Unión de teoría y práctica: La teoría orienta la práctica y esta supone una reflexión para la elaboración de teorías.
- Orientada a la mejora de la acción: Busca no sólo el análisis de la realidad, sino la mejora de la misma, puesto que entiende que los fenómenos educativos son susceptibles de mejora.
- Partir de problemas prácticos: El objeto de estudio son los problemas prácticos tal y como ocurren en su propio contexto, es decir, problemas de aula.

En la práctica, todo proceso de investigación-acción comienza con la constatación, por parte de un grupo de personas, de una situación educativa o social susceptible de mejora. Una vez identificado el problema, el grupo elabora un plan general, lo pone en práctica y evalúa, para elaborar de nuevo otro plan que tenga en cuenta dicha evaluación. Este proceso de peldaños helicoidales fue descrito por Lewin. Kemmis y McTaggart (1988, pp. 16-20), recogen las fases de la investigación-acción de Lewin en un esquema gráfico que responde a lo siguiente:

- Planificación (elaboración de un plan) debe anticipar y prever tanto la acción como las formas de observación, aunque debe ser lo suficientemente flexible como para adaptarse a las limitaciones y situaciones imprevistas que se producen en la realidad.
- Acción es deliberada y controlada por la planificación, pero debe estar abierta a los cambios que se producen pues se desarrolla en una realidad sujeta a una serie de limitaciones. La acción debe ser observada en el contexto en que tiene lugar para posteriormente poder ser evaluada.
- Observación o recogida de datos durante la acción, tiene la función de documentar ésta y proporcionar una base para la siguiente fase.
- Reflexión. Ésta tiene como finalidad describir y analizar los procesos, problemas y restricciones que se han puesto de manifiesto en la acción, y debe ser fruto de la discusión e intercambio de puntos de vista de un grupo de investigadores.

La validez de esta metodología según Elliot (1990) reside en la triangulación, lo que requeriría la presencia en las aulas de un observador externo. Hopkins (1989), sin embargo, describe un caso donde el investigador es el propio profesor sin esta figura. En las investigaciones realizadas en la Universidad de Valladolid, el director de la investigación asume el papel del observador externo a través de las grabaciones. Otra forma de validación es la saturación. Esta se produce cuando en el último ciclo experimental no se producen nuevos resultados.

En la investigación que presentamos, elaboramos una secuencia didáctica, desde la perspectiva de la conceptualización como aproximación óptima del concepto de límite (Blazquez, 1999), específica para alumnos de las carreras de Ingeniería. Esta secuencia fue desarrollada en tres ciclos (ciclo exploratorio, ciclo de confirmación y ciclo de cierre), verificando las cuatro fases de esta metodología (planificación, acción, observación y reflexión). En cada uno de los ciclos se realizaron los cambios necesarios teniendo en cuenta las reflexiones resultadas. La muestra estuvo compuesta por los alumnos de primer año de las carreras de Ingeniería de la Facultad de Ingeniería y Ciencias Económico Sociales de la Universidad Nacional de San Luis (Argentina).

RESULTADOS ALCANZADOS

Ciclo Introductorio

En primer lugar analizamos de forma exhaustiva los libros de texto usuales en la docencia de Análisis Matemático I. Observamos una gran diferencia en la presentación y tratamiento que hacen los diversos autores sobre el concepto de límite. Todos utilizan la conceptualización métrica o topológica, razón por la que se ha tenido que elaborar una secuencia didáctica desde la perspectiva de la conceptualización como aproximación óptima. Al finalizar el ciclo, se elaboró un cuestionario para analizar el aprendizaje de los alumnos. Como reflexión general a este cuestionario se podría destacar el número tan elevado de alumnos que no responde a las cuestiones planteadas. Se trata de cuestiones abiertas en las que no se da una orden concreta de actuación directa y, consecuentemente, parece que los alumnos están desconcertados.

El análisis de las tareas de los alumnos, utilizando categorías para clasificar sus respuestas, no basta para saber si han comprendido algunos conceptos, si han superado los actos de comprensión definidos para cada tarea.

Del análisis efectuado en cada una de las cuestiones se deduce que los alumnos tienen dificultades en el aprendizaje del concepto de límite en cualquier registro.

La mayor parte de los estudiantes intentan explicar el concepto mediante la idea de aproximación óptima, aunque se quedan en una aproximación ingenua. Sin embargo, ninguno intenta algo que tenga que ver con la simbología métrica.

Identifican el teorema de caracterización como definición del concepto, dan demasiada importancia al cálculo de límites, tienen dificultades en la conversión de registros, la manipulación simbólica es complicada para ellos, las interpretaciones de las gráficas no pasan de ser muy intuitivas, etc.

Tras las ilustraciones del concepto se pretende introducir la definición métrica. La forma en que se ha hecho no resulta del todo satisfactoria pues los alumnos no participan en la

construcción del concepto. Así, sería más adecuado plantearlo como una investigación dirigida. Como prerrequisito hay que clarificar lo que significa mejorar una aproximación en términos de entornos.

Parece ser que los alumnos se sienten más seguros utilizando el registro verbal que los otros tres que apenas consideran y, por tanto, no llegan a comprender el concepto (según Duval). No alcanzan el grado de adquisición conceptual que les permite realizar conversiones entre registros. Es más, tienen dificultades de interpretación del concepto en todos los registros. Confunden el cálculo algebraico con el concepto y utilizan el primero como sinónimo del segundo sin dar el paso de aplicación del concepto.

La manipulación simbólica no estándar, que no se reduce a un cálculo directo tiene dificultades para estos alumnos.

Ciclo confirmatorio

Este ciclo se planificó siguiendo las características y contenidos del ciclo anterior pero modificándolo de acuerdo a las reflexiones del mismo. Se utilizaron las tareas del ciclo anterior, aunque muchas de ellas modificadas, destacando la importancia de los problemas prácticos de este concepto. Así se podía avanzar un poco más en la investigación programada. Parece que las tareas de motivación son adecuadas y bien recibidas por los alumnos, surtiendo el efecto deseado.

El concepto de aproximación que, de hecho, resulta fácil de comprender cuando se trata de variables separadas (sucesiones), empeora notablemente cuando tienen que relacionarse mediante una relación funcional y, en general, parece que no distinguen con suficiente claridad la diferencia entre aproximación y tendencia.

Los resultados de las respuestas a preguntas directas formuladas en registros gráficos son mejores que cuando tienen que hacer alguna interpretación sobre datos más dispersos, como ocurre con las tablas numéricas, hecho que confirma la importancia de utilizar varios registros.

Al realizar tareas de conversión entre conceptualizaciones y registros se observan que los alumnos tienen enormes dificultades en la manipulación simbólica, lo que pone de manifiesto que la formación de los alumnos puede ser tan deficiente que les impide aprender conceptos como el que aquí se investiga. Sobre este hecho volveremos en el siguiente ciclo.

Para estos alumnos identificar la no existencia del límite es muy complicado en cualquier registro desde la propia definición. La herramienta preferida, más fácil de aplicar, es el teorema de caracterización.

Cuando tienen que ejemplificar situaciones particulares de límites concretos en puntos dados, estos alumnos recurren siempre a modelos gráficos y simbólicos de funciones que son siempre continuas, y con estas funciones no se puede saber si los alumnos discriminan los conceptos de continuidad y límite.

Se pone de manifiesto la dificultad que tienen los alumnos para demostrar propiedades por ellos mismos, aunque se trate de un constructivismo programado y sólo tengan que rellenar algunos huecos en los textos que reproducirían las demostraciones. El análisis comparativo de la aplicación de las definiciones métrica y como aproximación óptima confirman la hipótesis de la simplicidad de la definición como aproximación óptima frente a la definición métrica formal. Los alumnos aplican mejor la definición como aproximación óptima y parece que son capaces de memorizar la definición métrica pero sin comprender correctamente toda la simbología que conlleva esta definición.

Las dificultades en la aplicación del concepto de límite como aproximación óptima no son propias de la definición sino que están asociadas al concepto numérico, al concepto de función y a la asociación cartesiana de las variables funcionales. Son dificultades previas al concepto, que influyen directamente en su comprensión. En síntesis la definición como aproximación óptima es menos problemática para estos alumnos que la definición métrica tanto en la comprensión como en la aplicación para demostrar teoremas. Sin embargo el tratamiento que se ha realizado aquí puede ser débil y esta conjetura se esclarecerá en el ciclo siguiente.

Ciclo de cierre

La implementación de una secuencia didáctica para la enseñanza del tema límite de una función utilizando las nuevas tecnologías, es la modificación más significativa que se ejecutó en este ciclo aunque se mantuvieron los contenidos del ciclo anterior.

En la planificación, por una parte, se tuvo en cuenta la motivación en los alumnos y los cambios que se producen día a día con la aplicación de las nuevas tecnologías, y, por otro, aprovechar el dinamismo que se puede lograr con la computadora para mejorar la comprensión de este tema. Esto se debe a que se trata de un concepto dinámico que requiere movimientos en ambas variables y que se logran visualizar mejor por este medio. La secuencia fue diseñada específicamente para la enseñanza del tema Límite de una función mediante la utilización de una página web.

En cuanto al aprendizaje, se analizaron algunos aspectos que no se tuvieron en cuenta en el ciclo anterior y otros que ya se habían analizado, pero que requerían de un nuevo estudio. Los aspectos analizados fueron:

Mediante un ejercicio algorítmico los alumnos debían aplicar la aritmética de límites para poder resolverlo. Dado el alto porcentaje de alumnos que no responden a la cuestión o lo hacen sin sentido, parecería que no han logrado comprender el procedimiento. En general, aplican la aritmética en la composición pero no en la descomposición.

Se investigó si los alumnos eran capaces de discriminar la diferencia entre aproximación y tendencia por ser un concepto que no es tan fácil de comprender y que además ni los libros de texto ni, quizás, los profesores les dan la suficiente importancia.

De las respuestas de los alumnos podemos deducir que en general, se remiten a la conceptualización como aproximación óptima, aunque la mayoría se queda en la definición ingenua. En cuanto a las propiedades, recuerdan más las aritméticas.

Opinión de los alumnos sobre las clases en el laboratorio: si bien hubo problemas tales como distracciones, demasiado alumnos para las computadoras de la sala de cómputos y alumnos sin interés para el aprendizaje del tema, en general, sus opiniones revelan su conformidad en cuanto al tratamiento del tema de esta manera, algunos por motivación, otros porque consideran que de esta manera se aprende mejor y, otros, por la importancia de la visualización de imágenes para la comprensión del concepto. Aunque, en general, afirman que se trata de un complemento de la enseñanza, manifiestan que no se pueden obviar las explicaciones del profesor.

Propuesta curricular

La secuencia utilizando las nuevas tecnologías que se pone en práctica en esta investigación es una propuesta para la enseñanza del concepto de límite para primer año de las carreras de Ingeniería

Tanto en el ciclo exploratorio como en el ciclo de confirmación, la metodología se basó en la realización por parte del alumno, de una serie de tareas las que no son de tipo algorítmico trabajando los distintos registros de representación. Estas tareas se realizaron fuera del horario de clases pero fueron puestas en común en el aula de manera que se pudieran detectar las dificultades para poder superarlas..

En el segundo ciclo, se trabajó directamente en la sala de cómputos. Las tareas estaban incluidas en el software elaborado exclusivamente para la enseñanza de este tema. Los

alumnos debían resolver estas tareas utilizando las nuevas tecnologías y aprovechando el dinamismo para una mejor comprensión del concepto.

BIBLIOGRAFÍA

- Blázquez, S. (1999): *Noción de Límite en Matemáticas Aplicadas a Ciencias Sociales* Tesis Doctoral. Universidad de Valladolid, Valladolid.
- Blázquez, S. y Ortega, T. (1999): *Didáctica del Análisis en las Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales. Concepto de límite*. En, T. Ortega (ed.): *Temas controvertidos en Educación Matemática*. Valladolid: SAE de la Universidad de Valladolid, 121-154.
- Brousseau, G. (1986). *Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques*. Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol.7,n.2, pg. 33-115.
- Cantoral, R. (2003): *Mathematical Education : A vision of its evolution*. *Educational Studies in Mathematics*. 53 (3), pp. 255-270.
- Cantoral, R. y Farfán, R. (2004). *La sensibilité à la contradiction: logarithmes de nombres négatifs et origine de la variable complexe*. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. Vol 24, n° 2.3, pp. 137-168. Grenoble.
- Contreras, A. (2000). *La enseñanza del Análisis Matemático en el Bachillerato y primer curso de Universidad. Una perspectiva desde la teoría de los obstáculos epistemológicos y los actos de comprensión*. *Actas del IV Simposio de la SEIEM*. España: Huelva.
- Duval, R. (1998). *Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento*. *Investigaciones en Matemática Educativa II*. Ed. Hitt, F. Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav. México. Pg. 173-201.
- Elliot J. (1990): *La investigación-acción en Educación*. Madrid. Morata.
- Farfán, R. (2000). *Tradiciones y paradigmas de Investigación en Matemática Educativa*. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*. Vol. 14. Panamá. (pp. 131 – 140).
- Font, V. (2000). *Algunos puntos de vista sobre las representaciones en Didáctica de las Matemáticas*. Departamento de Didáctica de las CCEE y la Matemática de la Universidad de Barcelona. Barcelona.
- Hopkins, D. (1989): *Investigación en el aula*. Barcelona. PPU

- Kemmis y McTaggart (1988): *Cómo planificar la investigación-acción*. Barcelona. Ed. Alertes.
- Pérez, G. (1994): *Investigación cualitativa. Retos e interrogantes*. Madrid. La Muralla
- Pluinage (1998). *Los objetos matemáticos en la adquisición del razonamiento*.
Investigaciones en Matemática Educativa II. Ed. Hitt, F. Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav. México. Pg. 1-15.
- Sierpiska (1990): *Some remarks on understanding in mathematics*. For de learning of Mathematics, vol 10.3. Pg. 24-36.