Una Noción matemática básica y aparentemente simple: el Valor absoluto de un Número real.

Norma Cerizola - Nélida Pérez** -Ruth Martínez****
Universidad Nacional de San Luis
nperez@unsl.edu.ar – nceri@unsl.edu.ar

Introducción:

El valor absoluto de un número real es una noción básica de la Matemática y más específicamente de una de sus ramas principales: el Cálculo diferencial e integral. En esta noción se apoyan las definiciones de conceptos fundamentales como límite y continuidad, que constituyen verdaderos obstáculos epistemológicos en el aprendizaje, tal como lo muestran innumerables investigaciones.

Reflexionando sobre este hecho consideramos conveniente indagar si una de las causas era la incomprensión de esta noción básica. Nos parece tan simple que, en su enseñanza rara vez le otorgamos un tratamiento exhaustivo. Tampoco nos preguntamos si el enfoque es el adecuado, sobre todo teniendo en cuenta la necesidad de iniciar a los alumnos en el pensamiento variacional, necesario para captar la esencia del Cálculo.

Con respecto a lo señalado, hemos podido constatar que en la enseñanza de Precálculo no se pone suficiente énfasis en diseñar situaciones para que los alumnos comprendan este concepto. Sus propiedades son simplemente enumeradas y sus primeras aplicaciones, como resolución de igualdades y desigualdades con valor absoluto se tratan muy someramente.

Por ello decidimos realizar una investigación, donde la población estuvo constituida por alumnos del último año de la Educación Polimodal, con orientación en Ciencias Naturales, Salud y Ambiente, pertenecientes a una escuela pública de la Ciudad de San Luis.

Adoptamos como enfoque cognitivo el basado en los registros de representación semiótica y su incidencia en el aprendizaje de la matemática.

Este enfoque considera que *"la comprensión de un concepto matemático involucra la articulación coherente de los diferentes sistemas semióticos que entran en juego en la resolución de problemas"* y que *"un conocimiento asociado a un concepto es estable en un individuo, si él puede articular las diferentes representaciones de un objeto sin contradicciones" (4)*

Esta articulación contempla también la adquisición de estrategias de utilización de aquellos sistemas semióticos que facilitan la interpretación, la vía de solución y el control de resultados, de acuerdo a las características del problema.

Los objetivos de la experiencia fueron indagar sobre:

- Cómo "vive" la noción de valor absoluto en el aula.
- Cuáles son las características de su aplicación en la resolución de ecuaciones sencillas donde interviene esta noción por parte de los alumnos.
- Los registros de representación que los alumnos manejan y cuáles priorizan al resolver ecuaciones con valor absoluto.

Para su diseño tomamos en consideración los fundamentos y metodología de la Ingeniería Didáctica como un instrumento eficaz para guiar experimentaciones en clase. Esta contempla un aspecto crucial: el análisis preliminar, en sus componentes didáctica, epistemológica y cognitiva, es decir *"el diagnóstico sobre el funcionamiento del sistema de enseñanza, de los efectos que produce en las concepciones de los estudiantes y en un aspecto sustancial : la naturaleza intrínseca del saber matemático que se pone en escena en la situación escolar".(3)*

Esta metodología de investigación, garantiza - a partir su diseño y puesta en práctica – la autovalidación de los resultados.

Análisis preliminar
Dimensión Didáctica

En el establecimiento escolar mencionado, la enseñanza del concepto valor absoluto de un número real y de resolución de ecuaciones e inecuaciones con valor absoluto, se imparte someramente en el último año de la Educación Polimodal.

La definición que generalmente se utiliza, y que reemplaza a la que se enseña en EGB3: "*el valor absoluto de un número, es el número sin el signo*" es la siguiente:

El valor absoluto de un número real x, que se denota $|x|$*, es:*

$$|x| = \begin{cases} x \text{ si } x \geq 0 \\ -x \text{ si } x < 0 \end{cases}$$

Utilizando esta definición se deducen propiedades como las siguientes, que son empleadas para resolver ecuaciones e inecuaciones:

a) $|x| = a$ *(con a>0), es equivalente a:* $x = a$ *ó* $x = -a$

b) $|x| < a$ *(con a>0), es equivalente a:* $x < a$ *y* $x > -a$*, es decir* $-a < x < a$

c) $|x| > a$ *es equivalente a:* $x > a$ *ó* $x < -a$

Dentro de este contexto se proponen ejercicios como:

Resolver, especificando el conjunto solución:

$|x+3| = 6$; $|1-4x| = 13$; $|2x-9| < 1$; $|5-2x| > 3$; $|2x-1| = x-4$; $|2x+6 < 4x-2|$

En su enseñanza, los profesores utilizan procedimientos que corresponden al registro algebraico, dejando de lado el registro gráfico; no se recurre a la definición de valor absoluto como función, soslayando por consiguiente la "acción" que ejerce éste sobre números negativos, recurso visual muy útil para encontrar la solución, tanto de ecuaciones como de inecuaciones. Para resolverlos, se emplean procedimientos algebraicos y razonamientos lógicos que, según sean las características de la ecuación o inecuación, adquieren distinta complejidad. Desarrollan básicamente el pensamiento algorítmico, además de facilitar el aprendizaje del uso de conectivos lógicos, básicamente el "y" y el "o".

Dimensión epistemológica

Estudio de la construcción histórica del concepto valor absoluto

Este análisis es fundamental para la Ingeniería Didáctica, no sólo por el aporte de elementos importantes para su diseño, sino por que facilita la detección de obstáculos epistemológicos que se encuentran en la evolución histórica de los conceptos matemáticos y que reaparecen a la hora de su comprensión.

En cuanto al **valor absoluto de un número real**, Gagatsis y Thomaïdis (5) distinguen cuatro principales fases en su evolución:

Primera fase: el valor absoluto aparece como una noción implícita, estrictamente ligada a una concepción de número entero como número munido de un signo. Esta concepción, para

un número entero positivo o negativo, funcionó de manera eficaz y durante largo tiempo para la resolución de problemas aritméticos y algebraicos; por ejemplo para construir las tablas de logaritmos (Napier) o para elaborar una teoría general de las ecuaciones polinómicas (Descartes, Newton). Paralelamente, esta misma concepción abrió un campo teórico sobre el estudio de los números enteros autorizando la libre transposición de modelos exomatemáticos, como el "ganar" o el "perder"(Euler). En los textos de este período, aparece el concepto de valor absoluto como "el número sin el signo" o como "la distancia a partir del cero sobre la recta numérica".
Segunda fase: el valor absoluto asume una función de carácter explicativo en el contexto del cálculo algebraico, especialmente en el álgebra de inecuaciones. Muchas son las aplicaciones en el cálculo aproximado (cálculo de errores) y en la teoría de números (Lagrange, Gauss). La frase "haciendo abstracción del signo" es utilizada como un sustituto del concepto de valor absoluto, a fin de dar sentido exacto a ciertas transformaciones efectuadas sobre una inecuación.
Tercera fase: esta fase está ligada al cambio conceptual fundamental relativo al concepto de número; es decir, al pasaje progresivo que va desde la comprensión empírica como medio para medir y al concepto abstracto de número como elemento de un sistema matemático, caracterizado por las propiedades fundamentales de sus elementos y por la ausencia de contradicciones. Los enteros positivos y negativos adquieren un sentido autónomo, distinguiéndose en aritmética como un número munido de un signo.
El valor absoluto comienza así a aparecer como un concepto específico, definido para cada número. Paralelamente, se afirma su relación con el concepto de módulo de un número complejo, introducido en el mismo período (Argand, Cauchy). Es utilizado de modo sistemático en las diferentes aplicaciones del álgebra de inecuaciones.
En la obra de Cauchy: "*Curso de Análisis*" publicada en el año 1821, en lo que el autor llamó *Preliminares* (donde fijó el significado de los términos y notaciones), aparece ya el germen del concepto de valor absoluto al expresar:
"*.....el signo + o el signo – puesto frente a un número modificará su significado, de manera similar a como un adjetivo modifica el de un sustantivo....*"
Cauchy se sirve del valor absoluto como de un objeto matemático ordinario en la técnica "épsilon-delta", en las demostraciones de teoremas sobre convergencia de series. Utiliza este concepto y sus propiedades fundamentales de un modo indirecto. En esta fase, el valor absoluto carece de un simbolismo simple y no se formalizan sus propiedades utilizando ese simbolismo.
Cuarta y última fase: Corresponde precisamente a la etapa de formalización del Análisis, tan necesaria para la evolución del Análisis Complejo. El símbolo actual de valor absoluto, fue introducido por Weierstrass en 1841 para expresar el módulo de una variable compleja y ciertos conceptos topológicos y sólo es comúnmente aceptado a partir del último cuarto del siglo XIX.
La formalización de sus propiedades y su definición funcional "por partes" (aceptada tardíamente por la comunidad matemática), jugaron un papel muy importante para grandes generalizaciones del concepto, que hicieron su debut en el siglo XX, como el de distancia en Espacios Métricos y el de estimación en la Teoría de Cuerpos.

Diferentes definiciones de valor absoluto, su funcionamiento teórico y áulico

Realizamos un análisis de diferentes definiciones, que aparecen en libros de texto para el nivel, de las ventajas y desventajas de cada una de ellas, especialmente en lo relativo a su aplicación en la resolución de ecuaciones e inecuaciones.

a) La definición de valor absoluto:

$$|x| = \begin{cases} x \text{ si } x \geq 0 \\ -x \text{ si } x < 0 \end{cases}$$

Esta definición acarrea dificultades a la hora de su comprensión. Un aspecto insoslayable a tener en cuenta es que se trata de una definición funcional "por partes". A los mayoría de los alumnos le resulta difícil su interpretación y por consiguiente su aplicación.

La notación algebraica se constituye en otro factor de incomprensión, especialmente en la segunda parte de la definición: *"-x si x < 0"*. El signo menos delante de la *x* induce a asumir que se trata de un número negativo, produciendo interpretaciones erróneas al soslayar la condición $x<0$. Como consecuencia, resulta difícil aceptar que el valor absoluto de un número real es siempre mayor o igual a cero.

Esta incomprensión de la definición se manifiesta en situaciones más complejas (valor absoluto de funciones), tratadas especialmente en las aulas universitarias, aún en estudiantes de Licenciatura o Profesorado en Matemática.

Ejemplificamos uno de los errores más frecuentes:

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x) \text{ si } x \geq 0 \\ -f(x) \text{ si } x < 0 \end{cases} \qquad \text{por ejemplo, si: } f(x) = |2x-1| \qquad |2x-1| = \begin{cases} 2x-1 \text{ si } x \geq 0 \\ -2x-1 \text{ si } x < 0 \end{cases}$$

Otra dificultad de esta definición por partes, radica en que es ineludible la aplicación del método de análisis de casos para la resolución, tanto de ecuaciones como de inecuaciones con valor absoluto.

Por este método, en cada caso, se debe encontrar una solución dentro de un campo determinado por las condiciones del mismo, y para la solución es necesario considerar aquéllas que satisfacen las condiciones de acuerdo a los conectivos lógicos que intervienen.

Hemos podido observar que algunos estudiantes eligen acertadamente los casos a considerar, resolviendo en forma correcta las ecuaciones (o inecuaciones), según las condiciones, sin considerar las condiciones globales. Esto los conduce a dar una respuesta fragmentada, sin poder arribar a la solución correcta.

Otro aspecto digno de destacar es: el método algebraico no permite anticiparse y conjeturar la solución - estrategia muy útil, especialmente en ecuaciones complicadas - privando así al alumno de una herramienta eficaz para el control del proceso de resolución.

b) El valor absoluto de un número real como distancia:

Considerando que los números reales se representan gráficamente por medio de puntos de una recta, podemos pensar $|x|$ como distancia en sentido geométrico, es decir como la longitud del segmento que tiene como extremos *0* y *x*. Del mismo modo $|x-a|$ es la distancia entre *x* y *a*.

Esta definición de valor absoluto, es muy útil para la resolución de ecuaciones e inecuaciones sencillas, pues provee de economía a los procesos de resolución y permite una visualización que facilita la interpretación gráfica de su solución.

Sin embargo, puede comprobarse fácilmente que esta definición no es útil para resolver ecuaciones e inecuaciones más complejas como: $|x-3| < x+5$; $|3x-1|<|2x+7|$; $||x|-1| = 2$

c) La definición: |x| = máx {x, -x}.

Tiene desventajas similares a las de la definición funcional pues, para resolver tanto ecuaciones como inecuaciones, es necesario utilizar consecuencias que se desprenden de ella idénticas a las detalladas en el ítem a).

d) Tratamiento del valor absoluto utilizando la gráfica de f(x)=|x|

El registro gráfico es muy útil para resolver ecuaciones del tipo , $|x-3|=3$ si tenemos en cuenta el "efecto gráfico" de la aplicación del valor absoluto a funciones lineales.

Para resolver $|x-3|=3$, bastará graficar $y=x-3$, aplicar la reflexión con respecto del eje x de la parte negativa de la gráfica, obteniendo la gráfica de $y=|x-3|$, procediendo posteriormente a hallar la intersección con la recta $y=3$.

En ejemplos como el dado quizá no queda clara la eficacia de este método. Sin embargo, debemos poner énfasis en su aplicación, aún en ecuaciones e inecuaciones sencillas, por constituir la base conceptual y procedimental para avanzar en el estudio de ecuaciones e inecuaciones con valor absoluto más complejas.

Es aquí donde la potencia del uso del registro gráfico se pone de manifiesto al resolver ecuaciones e inecuaciones como: $|||x|-1|-1|=5$; $|x+2| < 3x+4$; $|x^2-3x+2| > 4x+7$.

Dimensión cognitiva

Para tener un panorama del nivel cognitivo de los alumnos respecto a la noción de valor absoluto y resolución de ecuaciones en una variable en donde interviene este concepto, se realizó con ellos una actividad de carácter exploratorio, consistente en resolver en forma grupal, utilizando lápiz y papel, las siguientes ecuaciones:

a) $|2x+1| = 0$ b) $|2x+1| = 2$ c) $|2|x|+1|=2$

y posteriormente graficar: $y=x$, $y=x-1$, $y=x+2$

Lo que surgió en primera instancia fue que en el aula "vivía" la noción de valor absoluto de la primera y segunda fases de su evolución histórica: *"el valor absoluto de un número es el número sin signo"**(*),*** ignorándose cualquier otra definición del concepto.

Los conocimientos de gráficas de funciones lineales, estaban olvidados. Sin embargo los alumnos, luego de pensar, hicieron uso de tablas de valores, valiéndose de ellas para graficar.

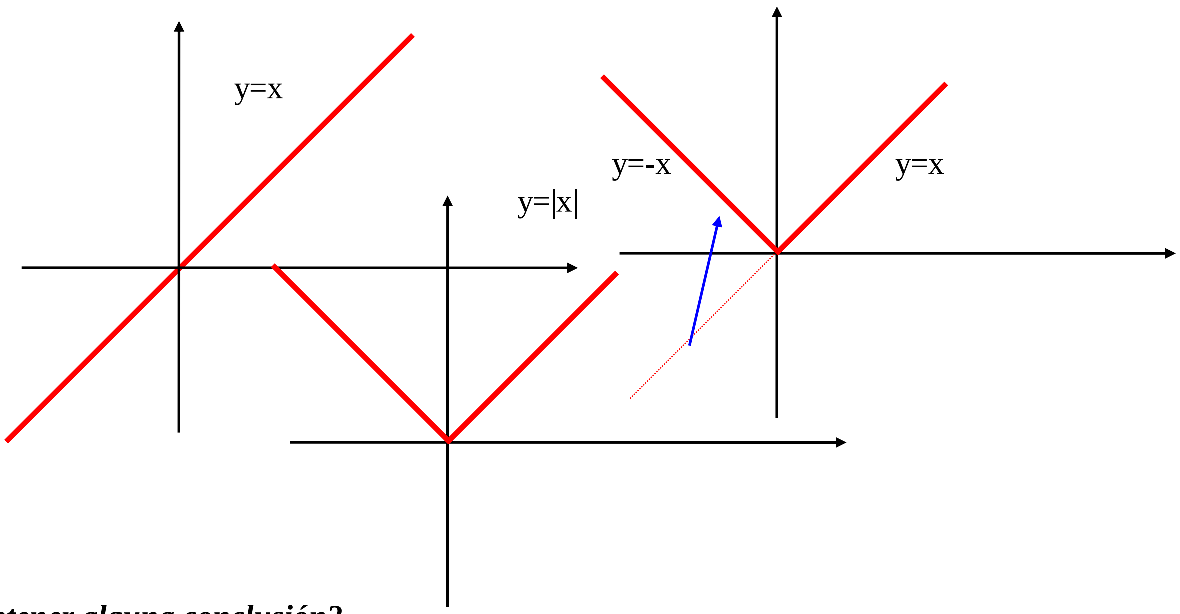
También recordaron haber estudiado rectas y parábolas en años anteriores, pero no las diferenciaban a partir de sus expresiones analíticas.

Diseño de la Ingeniería

En base al esclarecimiento que logramos sobre la problemática, a partir del análisis de las dimensiones didáctica, epistemológica y cognitiva, establecimos como objetivo indagar la posibilidad de que el grupo de alumnos utilizara el conocimiento de las gráficas de funciones lineales del tipo $y=ax+b$ para resolver problemas de ecuaciones con valor absoluto, sin emplear el desdoblamiento en casos, partiendo de problemas simples.

Transcribimos a continuación la actividad diseñada:

Actividad 1: ¿Cómo opera el valor absoluto sobre la función y=x?
Observa con detenimiento las siguientes gráficas:



¿Puedes obtener alguna conclusión?

El objetivo de esta actividad - claramente del tipo "mirar y ver"- fue indagar la capacidad de inferencia de los alumnos, a través de una secuencia en registro gráfico, sobre el "efecto" del valor absoluto sobre la gráfica de f(x)=x.

Actividad 2: Utilizando lo anterior, graficar $y=|x+1|$

Esta actividad tuvo como objetivo esclarecer si los estudiantes podían transferir los conocimientos adquiridos en la actividad anterior, a funciones lineales trasladadas.

Actividad 3: A partir del gráfico de la Actividad (2) determinar la solución de:

a) $|x-1|=0$ **b)** $|x-1|=3$ **c)** $|x-1|=-5$

Esta actividad se incorporó a fin de indagar si los alumnos recurrían al método gráfico para solucionar ecuaciones sencillas con valor absoluto.

Actividad 4: Resolver:

e) $||x|-1|=1$ **f)** $||x|-1|=1/2$

Se incluyó esta actividad más compleja para indagar sobre la capacidad de abordaje de las mismas por parte de los estudiantes, a partir de las ya realizadas.

Ámbito de desarrollo de la experiencia

Quisimos crear un ámbito áulico tranquilo y cordial para favorecer las producciones de los alumnos, tanto escritas como orales. Por ello una de nosotras actuó como **coordinadora** durante el desarrollo de la experiencia.

Esto permitió que los alumnos se comportaran sin inhibiciones. A través de sus expresiones espontáneas pudimos develar concepciones y actitudes ante situaciones problemáticas nuevas para ellos, tanto por el tema abordado como por las características de su tratamiento.

Se logró un buen nivel de participación mostrando interés en su mayoría. Sólo dos de los veinticinco alumnos permanecieron al margen durante el desarrollo de la experiencia.

Análisis de las producciones de los alumnos

Actividad 1

Fue notorio el comportamiento de casi todos los estudiantes ante una consigna de esta naturaleza: no realizaron la actividad, ni se cuestionaron sobre lo que se les solicitaba, pasando rápidamente a la siguiente.

Algunas de las expresiones fueron: *"Aquí no hay que hacer nada, vayamos a la otra actividad".*

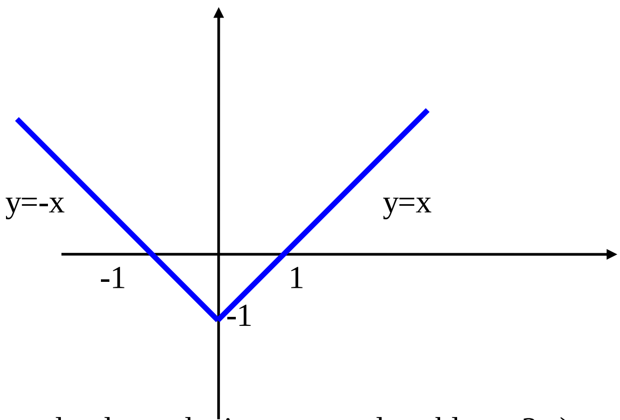
Afloró lo que sucede con cada vez mayor frecuencia en las aulas: no hacer caso a las consignas o no interpretarlas.

Sólo un grupo se detuvo en ella y luego de unos minutos se les escuchó decir: *"la gráfica rebota..."*

En las siguientes actividades hemos clasificado los trabajos de los alumnos (tanto producciones escritas como discusiones grupales), según características similares.

Grupo 1:

Trazan la gráfica :



- La gráfica errónea los induce a dar dos soluciones para el problema 3 a): $x=1$ *y* $x=-1$.
- Debido a la simetría de la gráfica, dan como solución $x=\pm 4$ para $|x-1|=3$
- No se percatan de que no hay solución para $|x-1|=-5$, respondiendo: $x=\pm 5$,

Grupo 2:

Trazan la misma gráfica pero no recurren a ella. Resuelven algebraicamente, **omitiendo el valor absoluto y** dando una solución única.

Estimamos que este error, también frecuente en aulas de otras culturas (5), se debe a que los alumnos manejan sólo la definición ***(*)*** y a la notación algebraica que los induce a pensar que $|x| = x.$ Para ellos x indica un número positivo, pues no está escrito el signo menos adelante.

También observamos la persistencia de concepciones erróneas, pues en el ejercicio c), despejando, llegan a $x=-4$. Sin embargo responden: *"no se puede porque es valor absoluto"* lo que muestra una confusión con la solución, la que sí puede ser negativa.

Grupo 3

No intentan dar soluciones a través de gráficas. Sus respuestas son solamente:

a) $x=1$ b) $x=-2$, $x=4$ c) no responden

Grupo 4:

A partir de una tabla de valores grafican bien $y=|x-1|$. Utilizando la gráfica obtienen soluciones correctas para a), b) y c). Sin embargo, a partir de la justificación de c): *"no tiene solución debido a que el valor absoluto actúa únicamente en los positivos"*, se puede inferir: hay una concepción equivocada o han utilizado la palabra "actúa" erróneamente, pero que el razonamiento es correcto.

Es el único grupo que intenta resolver d) y e). Grafican bien $y=||x|-1|$ y dan bien las soluciones a d) y e).

Grupo 5:

No escriben nada. Sin embargo se enfrascan en la discusión de cómo es la gráfica de $y=x-1$. Algunos opinan "*como y=x pasa por cero, al restarle uno, la gráfica de y=x baja una unidad*". Otros, en cambio dicen: "*la recta y=x se corre hacia la izquierda".*

Uno de los alumnos expresa: *"como la función toma el mismo valor para 1 y –1, se trata de una gráfica así"* (bosqueja "en el aire" una parábola). *"Entonces las ecuaciones son de segundo grado porque tienen dos soluciones. Yo no las sé resolver, había que aplicar una fórmula y no la recuerdo".*

Conclusiones:

1) La introducción de la noción de valor absoluto de un número como: "es el número sin el signo", acarrea serios obstáculos, por lo expresado anteriormente respecto a esta noción embrionaria.

2) A partir del análisis de los trabajos grupales, especialmente en las actividades detalladas en el Estudio Cognitivo, podemos inferir **que la totalidad recurrió al registro algebraico para resolver las ecuaciones.**

Un 80% ignoró la notación de barras del valor absoluto y trabajó como si se tratasen de ecuaciones lineales. Es de destacar que algunos grupos interpretaron las barras como corchetes y otros como paréntesis. En la ecuación c) las barras fueron interpretadas como corchetes y paréntesis, de acuerdo a las convenciones de la notación algebraica. **Observamos que ante ecuaciones, que eran totalmente desconocidas, intentaron igualmente resolverlas, tratando de asimilarlas a un campo conceptual conocido: resolución de ecuaciones lineales, adoptando incluso la notación propia de él.**Sólo el 20% utilizó el método de "ensayo y error", pero ignoraron las barras de valor absoluto obteniendo una única solución.

Sin embargo, este método fue cuestionado por otros alumnos expresando: "así no vale...eso no es matemático".

Probablemente esta concepción provenga de las prácticas docentes, pues en ellas frecuentemente se pone énfasis en un tratamiento puramente algebraico de las ecuaciones, aún en aquéllas tan simples que es posible dar la solución sin ningún procedimiento algebraico.

3) En varios alumnos emergió y persistió la concepción errónea de que **"una ecuación con valor absoluto siempre tiene que tener solución no negativa, pues el valor absoluto de un número tiene esta propiedad".**

Esta confusión posiblemente es atribuible a que no se ubican en el contexto de resolución de ecuaciones, primando en el pensamiento la característica primordial del valor absoluto.

4) Solamente, a partir de ser inducidos pudieron percatarse de la posibilidad de existencia de más de una solución. Ante este hecho **algunos las asimilan al campo de las ecuaciones cuadráticas por tener éstas dos soluciones**.

5) Cuando la coordinadora, en una de sus intervenciones, induce a graficar las rectas horizontales para encontrar los puntos de corte de la gráfica de una función con valor absoluto, para hallar las soluciones de la ecuación, varios alumnos logran captar la "esencia del método gráfico", sin embargo sólo aprenden el "recurso". **Obedecen al docente.**

No perciben los conceptos que están utilizando. Les falta conocimiento y

adiestramiento en el registro gráfico, a pesar de que en años anteriores han estudiado sistemas lineales.

6) Se percibió claramente la dificultad que el enfoque semiótico remarca cuando no hay congruencia entre registros.
La confusión al tratar de graficar y=x-1 y la discusión sobre si la gráfica "bajaba o se trasladaba" es una prueba de ello.

7) Los alumnos se sintieron atraídos ante una enseñanza no rutinaria de la matemática, donde asumieron un papel activo y no fueron meros espectadores. Rescatamos también el hecho significativo de que ellos percibieron la utilidad de conceptos aprendidos en años anteriores en un contexto de uso posterior, por ejemplo: ecuación de la recta y su representación gráfica.

Bibliografía

1) FARFÁN, R, Ingeniería Didáctica. Un estudio de la variación y el cambio. Grupo editorial Iberoamérica. México (1997)
2) FARFÁN, R, ALBERT, A. Un acercamiento gráfico a la resolución de desigualdades. Cuadernos Didácticos. Vol. 1. Grupo editorial Iberoamérica. México. 1997
3) GUZMÁN,I. Registros de representación, el aprendizaje de nociones relativas a funciones: voces de estudiantes. Rev.Relime. Vol. 1Núm. 1. Pág.5-21., International Thomson Editores. México 1998
4) Rev. Antologías. Núm. 2. CINVESTAV. Programa Editorial.México.1997
5) GAGATSIS A. Y THOMAIDIS I. Une Ètude multidimensionnelle du concept de valeur absolue. Vingt ans de Didactique des Mathématiques en France. Pág. 343-348. Ed. La Pensée Sauvaje. Francia, 1994.