LA JERARQUÍA DE OPERACIONES BÁSICAS COMO MEDIO DE ACERCAMIENTO AL RAZONAMIENTO ALGEBRAICO EN LA PRIMARIA

TREJO CRUZ, Ana Laura

Benemérita y Centenaria Escuela Normal de Jalisco

El problema que aborda esta investigación es la transición que compete ir de la aritmética al álgebra, dicho proceso se torna complejo para algunos alumnos por lo que ésta investigación abordará qué es lo que provoca que no todos logren dicha evolución.

Ésta puede ser por diversas dificultades que los estudiantes se enfrentan, un ejemplo de ello es (Zafra, s/f) la interpretación de los problemas ya que requiere de una serie de habilidades lingüísticas y comunicativas que implican la comprensión y asimilación de un conjunto de conceptos y procesos relacionados con la simbolización, representación, aplicación de reglas generales y traducción de un lenguaje a otro. Un ejemplo que evidencia lo referido anteriormente sería el siguiente: Tú y dos compañeros han construido una pared de 800 legos. Tú colocaste 305, el segundo 390 ¿cuántos colocó el tercer compañero?

La comprensión y asimilación de los conceptos se identifican al ser los datos numéricos que la problemática expone, los cuales son 800, 305, 390. Después la aplicación de las reglas generales y traducción del lenguaje sugieren la operación que necesitas.

Sin embargo la comprensión no suele ser del todo fácil por lo que este estudio y su objetivo general se limitan a identificar la manera en que los niños resuelven problemas matemáticos que impliquen el uso de la jerarquía de operaciones básicas como medio de acercamiento al razonamiento algebraico.

Primaria - Álgebra - Aritmética - Jerarquía de operaciones

Introducción

Contextualización del tema

La investigación será llevada a cabo en el grupo de tercero A de la Escuela Urbana 224 "Año de Juárez", ubicada en la zona metropolitana de Guadalajara dentro del estado de Jalisco en México. A través de diversos instrumentos aplicados me di cuenta que los niños presentan dificultades para la resolución de problemas algebraicos que impliquen la utilización de la jerarquía de operaciones básicas.

Antecedentes

Sabemos que el área de las matemáticas es un campo de los más difíciles de abordar en la primaria y mucho más en la transición que hay entre la aritmética y el álgebra, o bien los dos al mismo tiempo. Es por ello que es necesario que los docentes cuenten con las suficientes herramientas que puedan brindarle a sus alumnos para que estos desarrollen competencias; entonces, al tener diferentes estrategias didácticas que favorezcan que sus estudiantes incrementen y potencialicen sus aprendizajes, harán que sus estancias en la escuela primaria sea más placenteras y provechosas.

Así pues, Godino cita a Molina (2017), quien menciona que como respuesta a este hecho, se han realizado numerosas investigaciones que analizan y promueven la integración del álgebra en el currículo de la educación primaria.

Por lo cual, mi investigación es viable y factible pues podrá ser realizada durante las jornadas de prácticas de los últimos dos semestres de la Licenciatura en Educación Primaria, además abonaría a diversas competencias del Perfil de Egreso de la misma.

Así mismo, el álgebra junto con la aritmética; son áreas que se tocan día a día en las escuelas primarias desde primero hasta sexto grado. Y los docentes necesitamos cada vez más, mayores herramientas que nos ayuden a tratar los temas con los niños aunado a que cuando estos se encuentran ya en nivel secundaria no encuentran sentido a las matemáticas.

El pensamiento algebraico temprano, no se encuentra presente en concreto en los niños a nivel primaria, sería bueno indagar su razón aunado a que si es viable analizar qué dificultades presentan los niños al enfrentarse con actividades de razonamiento algebraico y si es posible tratar de clarificarlas.

Problema

Los niños durante su estancia en la primaria realizan diversas actividades en el área de matemáticas que abonan a sus propios conocimientos para generar nuevos. Por lo regular, cada maestro debe trabajar en cada bloque de estudio los tres ejes temáticos que marca el Programa de Estudios 2011 (SEP, 2011):

Sentido numérico y pensamiento algebraico.

Forma, espacio y medida.

Manejo de la información.

Así pues, la transición que compete ir de la aritmética al álgebra es complejo. Ésta puede ser por diversas dificultades que los estudiantes se enfrentan, un ejemplo de ello es (Zafra, s/f) la interpretación de los problemas ya que requiere de una serie de habilidades lingüísticas que implican la comprensión y asimilación de un conjunto de conceptos y procesos relacionados con la simbolización, representación, aplicación de reglas generales y traducción de un lenguaje a otro.

Otros errores que los alumnos cometen al comenzar con el razonamiento del álgebra en la escuela primaria es que (Butto y Rojano, 2010) suelen usar métodos aritméticos en lugar de métodos algebraicos para resolver problemas de enunciado y tienen dificultades para comprender y manejar conceptos propios del álgebra. En ese sentido, algunos autores afirman que, para el desarrollo del pensamiento algebraico, es imprescindible que los alumnos puedan pensar y percibir la simbología y las operaciones aritméticas de manera distinta a la que se cultiva tradicionalmente en la escuela primaria, para que, sobre ese nuevo modo de pensamiento aritmético, puedan construir las nociones básicas del álgebra.

Algunas de las nociones básicas del álgebra, según (Godino, 2017) son:

- Comprender patrones, relaciones y funciones.
- Representar y analizar situaciones matemáticas y estructuras usando símbolos algebraicos.
- Usar modelos matemáticos para representar y comprender relaciones cuantitativas.
- Analizar el cambio en diversos contextos.

Para ello, se hizo una intervención en el campo durante las prácticas realizadas del 3 al 7 y del 24 al 28 de abril, en las cuales se realizó un instrumento de aplicación en los niños de tercero A de la Escuela Urbana 224 Año de Juárez. En total, 21 niños elaboraron la actividad, la cual consistía en resolver un problema matemático que implicara la utilización de la jerarquía de operaciones para resolverlo. En estos problemas descubrí que un cierto porcentaje de los niños aún no presenta un acercamiento al razonamiento del algebra debido a que no traducían de un lenguaje natural a uno algebraico. Mucho menos exponían sus argumentaciones del cómo llegaron a la respuesta. Mientras que otros estudiantes si lograron resolverlo "correctamente".

Cabe mencionar, que el instrumento tenía la finalidad de analizar y observar qué tanto y como se han acercado los niños al álgebra, lo cual los resultados fueron sorprendentes ya que la actividad propuesta fue tomada del libro de Desafíos Matemáticos de segundo grado.

De esta manera, surge lo siguiente ¿si los alumnos de primaria solucionan un problema matemático que implique la utilización de jerarquía de operaciones básicas para resolverlo presentarán un acercamiento al razonamiento algebraico?, ¿por qué los niños no saben cómo resolvieron los problemas planteados?, ¿de qué manera los estudiantes de primaria pueden presentar un acercamiento al pensamiento algebraico temprano y que por ende les sea de gran utilidad cuando logren avanzar hacia el nivel secundario?, ¿por qué los niños no traducen el lenguaje natural al algebraico?, ¿qué nociones básicas matemáticas deben manifestar los niños para poder iniciar un razonamiento algebraico?, entre otras cuestiones.

Por lo cual, todo lo mencionado anteriormente con relación a las dificultades y errores que suelen presentar los estudiantes con el álgebra, se ha llegado al resultado que el proceso de la construcción del pensamiento algebraico es extenso por lo tanto sería pertinente realizar una ardua investigación sobre cómo es que éste se lleva a cabo en la primaria y si es necesario desarrollar una propuesta de mejora de la misma.

Objetivos

General:

- Estudiar de qué manera los niños resuelven problemas matemáticos que impliquen el uso de la jerarquía de operaciones básicas como medio de acercamiento al razonamiento algebraico.

Particulares:

- Investigar la factibilidad de la utilización de la jerarquía de operaciones básicas como medio de acercamiento al álgebra.
- Analizar cómo los niños de primaria transitan del lenguaje aritmético al algebraico.
- Estudiar cuáles son los procesos de generalización que trabajan los niños.

Referentes teórico- conceptuales

Diversas investigaciones (Bednarz, Kieran & Lee, 1996; Filloy, Puig & Rojano, 2008; Wagner & Kieran, 1989) han reportado las dificultades de los niños en el tránsito desde la aritmética hasta el álgebra en la escuela secundaria, dificultades que se centran en la manipulación de letras y en la dotación de significado, pues supone un cambio notable en las convenciones usadas en la aritmética (Kieran, 1992).

Esto posiblemente obedece a que el estudio del álgebra ha sido visto como una transición lineal, como una extensión de los cálculos numéricos al cálculo literal (Butto & Rojano, 2004), y como una herramienta para la manipulación de símbolos para resolver problemas, desprovista de significado (Kieran, 2007). Por tal motivo, diversas investigaciones en educación matemática se han centrado en buscar formas más efectivas de abordar la enseñanza del álgebra; una de ellas es la introducción de aspectos de razonamiento algebraico en la educación primaria (Davis, 1985; Kaput, 2000; Vergnaud, 1988).

Aunado a que Godino y Wilhelmi mencionan que el profesor de Educación Primaria debe conocer las características del razonamiento algebraico para poder ser capaz de seleccionar y elaborar tareas matemáticas adecuadas que permitan la progresiva introducción del álgebra en su aula.

Según Godino (2017), se distinguen tres niveles en la primaria de razonamiento algebraico, establece además criterios para identificar la actividad matemática puramente aritmética (nivel 0 de algebrización) y la distingue de los progresivos niveles de algebrización. A la actividad claramente algebrizada se asigna un nivel 3 y se establecen otros dos niveles intermedios de actividad proto-algebraica. Estableciéndolos en la siguiente tabla:

Tabla 2. *Rasgos característicos de los niveles de razonamiento algebraico elemental*

<table>
<tr><td colspan="4">Tarea: Para ir a la escuela los alumnos utilizan dos medios de locomoción. Por cada alumno que va en coche hay 3 que van andando. Si hay 212 alumnos en la escuela, ¿Cuántos alumnos utilizan cada medio de locomoción?</td></tr>
<tr><td>NIVELES</td><td>OBJETOS</td><td>TRANSFORMACIONES</td><td>LENGUAJES</td></tr>
<tr><td rowspan="2">0</td><td>Intervienen objetos intensivos de primer grado. En tareas estructurales pueden intervenir datos desconocidos.</td><td>Se opera con objetos intensivos de primer grado (números particulares).</td><td>Natural, numérico, icónico, gestual; pueden intervenir símbolos que refieren a objetos extensivos o datos desconocidos</td></tr>
<tr><td colspan="3">Ejemplo de resolución:
Si de cada 3 alumnos que van andando hay 1 que va en coche, de cada 4 alumnos en total (3+1) hay 1 que va andando (la cuarta parte), por lo tanto de cada 200 alumnos, 50 irían en coche (la cuarta parte); de cada 12 alumnos 3 irían en coche. Por tanto, 53 alumnos irían en coche. La solución sería 53 alumnos van en coche mientras que el triple de 53, es decir, 159 van andando.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">1</td><td>Intervienen de manera implícita objetos intensivos de grado 2, esto es, clases de intensivos de grado 1.</td><td>Se aplican relaciones y propiedades genéricas de las operaciones con objetos intensivos de primer grado, tanto en tareas estructurales como funcionales.</td><td>Natural, numérico, icónico, gestual; pueden intervenir símbolos que refieren a los intensivos intervinientes.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Ejemplo de resolución:
Por cada 4 alumnos hay 3 que van andando. Podemos plantear la siguiente proporcionalidad:
4(niños) ------> 3 van andando
212 (niños en la escuela) ------> x van andando
$\frac{4}{3} = \frac{212}{x}$; x =3×212/4
Una vez que obtenemos el número de los que van andando a clase, solo queda restar al número total de alumnos, los que van andando, para obtener los que acuden al colegio en coche.212 - 159 = 53 niños van en coche.</td></tr>
</table>

	proporcionalidad: *4(niños) ------> 3 van andando* *212 (niños en la escuela) ------> x van andando* $\frac{4}{3}=\frac{212}{x}$; *x =3×212/4* *Una vez que obtenemos el número de los que van andando a clase, solo queda restar al número total de alumnos, los que van andando, para obtener los que acuden al colegio en coche.212 - 159 = 53 niños van en coche.*		
2	Intervienen indeterminadas o variables como expresión de los intensivos de grado 2.	En tareas estructurales las ecuaciones son de la forma $Ax + B = C$. En tareas funcionales se reconoce la generalidad pero no se opera con las variables para obtener formas canónicas de expresión.	Simbólico – literal, usado para referir a los intensivos reconocidos, aunque ligados a la información del contexto espacial y temporal.
	Ejemplo: *212=x + 3x* *212 = 4x; x = 212 / 4; x = 53* *53 alumnos van en coche y 212-53 = 159 van andando*		
3	Intervienen indeterminadas, incógnitas, ecuaciones, variables y funciones particulares.	En tareas estructurales las ecuaciones son de la forma $Ax + B = Cx + D$. Se opera con las indeterminadas o variables.	Simbólico – literal; los símbolos se usan de manera analítica, sin referir a la información del contexto.
	Ejemplo: *x = Alumnos que van en coche* *y = Alumnos que van andando* *x + y = 212; x + 3x = 212;* *y= 3x; 4x = 212; x = 212/4 = 53*		

Esta álgebra informal y operacional se corresponde con los niveles 1 y 2 (protoalgebraicos) descritos. Evidentemente, dichos niveles no agotan los procesos de "algebrización", sino que describen el paulatino enriquecimiento de herramientas para la resolución de problemas con un grado creciente de generalización y simbolización y 7 evolucionan hacia niveles superiores al final de la Educación Primaria y primer ciclo de Secundaria.

Sin embargo diversos autores (Aké, 2015), plantean otros niveles de pensamiento algebraico:

1. Ausencia del razonamiento algebraico (Nivel 0). Este nivel está caracterizado por la intervención de objetos particulares expresados en un lenguaje natural, numérico, icónico, gestual; no se reconocen relaciones y propiedades de las operaciones.

2. Nivel incipiente de algebrización (Nivel 1). Este nivel se caracteriza por el reconocimiento de relaciones y propiedades de las operaciones expresadas en un lenguaje natural, numérico, icónico, gestual; pueden intervenir símbolos que expresen cantidades desconocidas. En tareas funcionales se reconoce la generalidad aunque expresada en un lenguaje diferente al simbólico-literal.

3. Nivel intermedio de algebrización (Nivel 2). Este nivel se caracteriza por el uso de un lenguaje alfanumérico a través del reconocimiento y planteamiento de ecuaciones

de la forma ± =. En tareas funcionales se reconoce la generalidad, pero no se opera con las variables para obtener formas canónicas de expresión.

4. Nivel consolidado de algebrización (Nivel 3). Este nivel se caracteriza por el empleo de un lenguaje alfanumérico; los símbolos se usan de manera analítica y se opera con las indeterminadas o variables planteando ecuaciones de la forma ± = ± . También se plantea la formulación simbólica y descontextualizada de reglas canónicas de expresión de funciones y patrones.

Así mismo, Butto y Rojano (2017), realizaron investigaciones en niños de entre 10 y 12 años en su transición de la aritmética al algebra durante su estancia en la primaria En el que concluyeron que "las dos rutas de acceso, pensamiento proporcional y procesos de generalización probaron ser útiles en la introducción de las primeras ideas algebraicas,...la combinación de actividades, materiales y ambientes, así como la estructura de la secuencia didáctica supervisada por el maestro ayudó a promover la ZDP. Los estudiantes pudieron acercarse al pensamiento algebraico a través de números, formas y medidas, y les hizo pensar acerca de las relaciones entre variables, garantizándoles la oportunidad de operar mentalmente con estos objetos".

Pero, ¿qué es generalización en álgebra? según Mason (1985), la generalización en álgebra es el punto de partida hacia la abstracción matemática y puede ser desarrollada a partir del trabajo con patrones o regularidades. Para aprender el lenguaje algebraico, es importante que el alumno tenga algo que comunicar; así, al percibir un patrón o una regularidad, puede intentar expresarlo y comunicárselo a alguien. Para el referido autor, hay cuatro etapas para trabajar la generalidad en el salón de clases: percepción de un patrón; expresión de un patrón; registro de un patrón; prueba de la validez de la(s) fórmula(s).

También, Brizuela y Blanton (2014), presentan un artículo sobre los resultados de sus investigaciones focalizadas en el desarrollo del pensamiento algebraico en niños de escolaridad primaria. Y Socas (2011), realiza un artículo en la Revista NÚMEROS, en donde dice que la conceptualización del pre – álgebra es muy importante en la enseñanza básica pues es ahí donde se encuentra la relación entre la aritmética y el álgebra.

Piaget menciona la construcción del conocimiento lógico matemático en los niños, así como la teoría del número [1].Así como también, habla del desarrollo del pensamiento matemático infantil según el Departamento de Didáctica de la Matemática.

Vygotsky señala que el conocimiento es un proceso de interacción entre el sujeto y el medio, pero el medio entendido como algo social y cultural, no solamente físico; el cual debe propiciar el docente.

Brousseau propone que el producir conocimientos supone tanto establecer nuevas relaciones, como transformar y reorganizar otras. Así pues, en todos los casos, que el producir conocimientos implica validarlos, según las normas y los procedimientos aceptados por la comunidad matemática en la que dicha producción tiene lugar.

Mientras que Brunner promueve que el aprendizaje de conceptos matemáticos se debe introducir a partir de actividades simples que los alumnos puedan manipular para descubrir principios y soluciones matemáticas.

Por último, para Ausubel "la resolución de problemas es la forma de actividad o pensamiento dirigido en los que, tanto la representación cognoscitiva de la experiencia previa como los componentes de una situación problemática actual, son reorganizados, transformados o recombinados para logar un objetivo diseñado; involucra la generación de estrategias que trasciende la mera aplicación de principios".

Aspectos metodológicos

La investigación de este escrito es de corte cualitativo pues estudiará los fenómenos que suceden durante los procesos de enseñanza y aprendizaje del surgimiento de un pensamiento algebraico temprano en la primaria con el fin de analizar de qué manera los estudiantes se apropian del lenguaje y llegan a la generalización del mismo.

El papel del investigador en este estudio será de carácter participativo ya que intervendrá con diversos instrumentos de indagación en su grupo de prácticas.

Resultados alcanzados y/o esperados

He logrado detectar el problema en el salón de clases en el que realizo mi servicio social, espero analizar con detenimiento los procesos cognoscitivos que presentan los niños al resolver problemas algebraicos y si es posible ayudarlos. Así mismo, ver qué tan factible es que los estudiantes utilicen la jerarquía de operaciones para llegar a la transición del lenguaje aritmético al algebraico.

Referencias bibliográficas

Aké, Lilia P.; Godino, Juan D.; Castro, Walter F. (2015). Distinción del pensamiento algebraico del aritmético en actividades matemáticas escolares. CIAEM.

Atom, M. (2009). El aporte de Piaget a las Matemáticas. Recuperado el 15 de enero de 2017. Sitio web: http://piagetymatematicas.blogspot.mx/

Brizuela, B.; Blanton, M. (2014). El desarrollo del pensamiento algebraico en niños de escolaridad primaria. Revista de pedagogía. Recuperado el 21 de enero de 2017. Sitio web: https://ase.tufts.edu/education/documents/publicationsBrizuela/BrizuelaBlanton_ElDesarrollo_2014.pdf

Brousseau, G. (1986). Fundamentos y Métodos de la Didáctica de la Matemática. Facultad de Matemática, Astronomía y Física. Universidad Nacional de Córdoba.

Butto Zarzar, C. M; Rojano Ceballos, M. T. (s/f). *Pensamiento algebraico temprano.* Ponencia: Congreso Nacional de Investigación Educativa (COMIE). Recuperado el 17 de enero de 2017. Sitio web: http://www.comie.org.mx/congreso/memoriaelectronica/v10/pdf/area_tematica_05/ponencias/1391-F.pdf

Castro Martínez, E. ; Del Olmo Romero, Á; Castro Martínez, E. (s/f). Desarrollo del pensamiento matemático infantil. Universidad de Granada. Departamento de Didáctica de la Matemática. Sitio web: http://wdb.ugr.es/~encastro/wp-content/uploads/DesarrolloPensamiento.pdf

Elbo; I. Puigdellívol; M. Soler Gallart; R. Valls Carol (2006). *Modelo de aprendizaje sociocultural de Lev Vygotsky.* Comunidades de aprendizaje: Transformar la educación. Editorial: Graó.

Flores, P. (s/f). *Aprendizaje en Matemáticas.* Universidad de Granada. Recuperado el 21 de enero de 2017. Sitio web: http://www.ugr.es/~pflores/textos/cLASES/CAP/APRENDI.pdf

Godino, J. D.; R. Wilhelmi, M. (s/f).Niveles de algebrización de la actividad matemática escolar. Implicaciones para la formación de maestros. Universidad de Granada. Recuperado el 14 de enero de 2017. Sitio web: http://www.ugr.es/~jgodino/eos/niveles_algebrizacion.pdf

Masachs, A. M.; Camprubí, G. E.; Naudi, M.M. (2005). *El aprendizaje significativo en la resolución de problemas matemáticos. Universidad Nacional del Nordeste.* Recuperado el 19 de enero de 2017. Sitio web: http://www.unne.edu.ar/unnevieja/Web/cyt/com2005/9-Educacion/D-013.pdf

Socas, M. (2011). *La enseñanza del Álgebra en la Educación Obligatoria. Aportaciones de la investigación.* Universidad de La Laguna. NÚMEROS: Revista de Didáctica de las Matemáticas. Recuperado el 21 de enero de 2017. Sitio web: http://www.sinewton.org/numeros/numeros/77/Apertura.pdf