¿CÓMO ABORDAR LA MODELIZACIÓN MATEMÁTICA EN LA FORMACIÓN DE PROFESORES?

REID, Marisa
BOTTA GIODA, Rosana

Universidad Nacional de la Pampa
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

En el presente trabajo se describe y analiza una propuesta para abordar la Modelización Matemática en la asignatura Práctica Educativa II del tercer año del Profesorado de Matemática de la Universidad Nacional de La Pampa (UNLPam).

La modelización como estrategia de enseñanza es considerada como un elemento fundamental en la formación inicial del profesor de Matemática.

En esta propuesta se plantea trabajar con la modelización matemática con un doble objetivo que los futuros profesores vivencien el trabajo con este tipo de situaciones para su posterior planificación y transferencia al ciclo básico u orientado de la educación secundaria.

Se abordará el proceso de modelización matemática a través de material de lectura, trabajo grupal en la resolución de un problema de la vida cotidiana, discusión, presentaciones y reflexiones focalizadas en el trabajo docente y su incorporación a las planificaciones en el nivel secundario.

Se espera que con la implementación de estas actividades los futuros profesores desarrollen la comprensión del ciclo de modelización como un proceso iterativo que implica hacer suposiciones y validar conclusiones vinculadas a situaciones cotidianas.

Esta experiencia facilitará reflexiones, modificaciones y revisiones de los modelos conceptuales de los futuros profesores y brindará herramientas que los preparen mejor para anticipar las formas en sus alumnos pueden pensar matemáticamente los problemas del mundo real.

Modelización matemática - Formación Inicial Profesorado -Tecnología

Introducción

En la asignatura Practica Educativa II del tercer año del Profesorado en Matemática de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la UNLPam se considera que la escuela debería aportar las herramientas para que los estudiantes adquieran habilidades para utilizar y relacionar los conceptos, las formas de expresión y razonamiento matemático, tanto para producir e interpretar distintos tipos de información, como para ampliar el conocimiento sobre aspectos cuantitativos y espaciales de la realidad, y para resolver problemas relacionados con la vida cotidiana.

Creemos que la aplicación de la modelización matemática, en educación secundaria, favorece este propósito en la medida que los estudiantes logren plantear y resolver situaciones problemáticas con criterios de objetividad y en consonancia con su entorno sociocultural.

Referentes teórico-conceptuales

Distintos investigadores han argumentado sobre la inserción de actividades de modelización en la matemática escolar. En este sentido Barbosa (2001), señala que la modelización puede generar un ambiente de aprendizaje en el cual los alumnos son invitados a problematizar e investigar, por medio de la matemática, situaciones con referencia en la realidad.

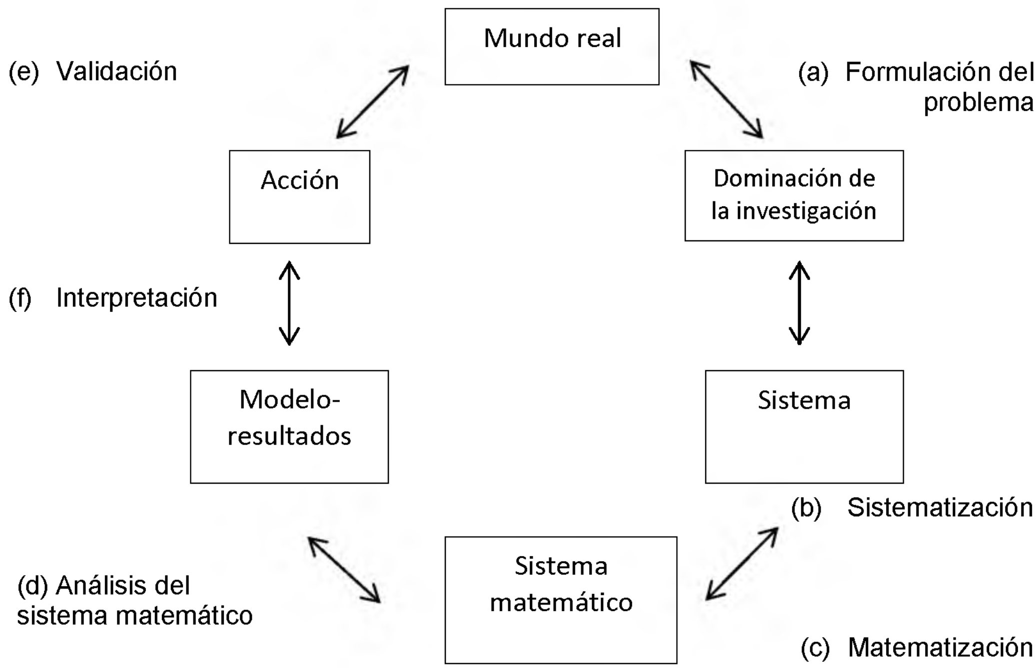
En la literatura internacional se plantea la necesidad de que los futuros profesores tengan experiencias con estrategias de enseñanza como la modelización matemática durante su formación, con el fin de mitigar las dificultades que se presentan en su implementación en las aulas. Además, algunos autores como Kaiser y Sriraman (2006) señalan que no existe una transferencia entre el conocimiento de los conceptos matemáticos al conocimiento sobre la resolución de problemas y las aplicaciones, es decir que este último aspecto requiere ser tratado de manera diferenciada en el currículo.

En consecuencia, se propondrá al grupo de estudiantes de la asignatura una situación problemática, con el fin de abordarlo poniendo énfasis en las fases del ciclo de modelización.

Atendiendo a lo antes expuesto se formularon las siguientes cuestiones: ¿Cómo representan los futuros profesores los problemas matemáticos relacionados a su entorno real? ¿Qué esquemas de modelización utilizan al resolver problemas del mundo real? ¿Qué respuestas dan a los problemas que se les propone dentro de un contexto de modelización?

La modelización matemática es un término empleado en distintos contextos y con distintos objetivos, una buena clasificación de las investigaciones en el área se puede encontrar en los trabajos de Blomhøj (2009). Modelizar en el ambiente de Educación Matemática refiere al proceso que involucra la representación de la realidad por medio de un modelo matemático.

En esta experiencia, adoptamos los momentos descriptos por Blomhøj y Jensen (2003) que ofrecen una visualización útil y completa del proceso de modelización, a través de seis etapas o sub-procesos:



(a) Formulación del problema: formulación de una tarea (más o menos explícita) que guíe la identificación de las características de la realidad percibida que será modelizada.

(b) Sistematización: selección de los objetos relevantes, relaciones, etc. del dominio de investigación resultante e idealización de las mismas para hacer posible una representación matemática.

(c) Traducción de esos objetos y relaciones al lenguaje matemático.

(d) Uso de métodos matemáticos para arribar a resultados matemáticos y conclusiones.

(e) Interpretación de los resultados y conclusiones considerando el dominio de investigación inicial.

(f) Evaluación de la validez del modelo por comparación con datos (observados o predichos) y/o con el conocimiento teórico o por experiencia personal o compartida.

Un proceso de modelización siempre toma la forma de un proceso cíclico donde las reflexiones sobre el modelo y la intención de uso de éste, conduce a una redefinición del mismo.

El conocimiento teórico y los datos empíricos concernientes al dominio de investigación son la base para todos los sub-procesos.

Se espera que con la implementación de estas actividades los futuros profesores desarrollen la comprensión del ciclo de modelización matemática como un proceso que implica hacer suposiciones y validar conclusiones vinculadas a situaciones cotidianas.

La idea es que los futuros profesores tengan experiencias prácticas y accedan a un conocimiento teórico sobre modelización matemática durante su formación profesional.

En el aspecto práctico se han diseñado espacios de desarrollo profesional para profesores o futuros profesores de matemática con el fin favorecer la inserción de la modelización matemática en las aulas (Lingefjärd, 2007); además, se sugiere la reflexión sobre la organización del aula y de los contenidos, las dificultades, tensiones y beneficios obtenidos mediante su implementación en la educación secundaria (Barbosa, 2001).

Aspectos metodológicos

La experiencia se desarrollará el primer cuatrimestre del año 2017 con estudiantes que cursen la asignatura Práctica Educativa II. Las actividades se planificaron en tres momentos. En una etapa inicial, se discutirán el concepto Modelo y las distintas perspectivas de Modelización. También se leerán y analizarán artículos referidos a proyectos de modelización matemática en la escuela secundaria, de autores tales como, Esteley, Mina, Cristante y Marguet (2007) y Blomhøj (2004).

Para el segundo momento los alumnos distribuidos en grupos explorarán un problema de la realidad por medio de la Matemática para comprender qué es Modelización Matemática, discutiendo las fases del proceso. Las docentes responsables de la asignatura actuarán como orientadoras, cuando los estudiantes lo requieran, realizando preguntas que invoquen la investigación en el desarrollo del proceso de modelización.

En las diferentes etapas de ejecución del proceso de Modelización Matemática, los alumnos necesitan analizar información, usar diferentes modos de representación (algebraica, gráfica, geométrica, numérica), formular problemas, desarrollar modelos y encontrar soluciones, formular y justificar conjeturas, analizar e interpretar los resultados.

El tercer momento será dedicado a la presentación de la producción de cada grupo, donde describirán las suposiciones que consideraron en la resolución del problema, las hipótesis que debieron realizar y la justificación de los resultados. Estas presentaciones permitirán que los distintos grupos discutan las soluciones de cada uno, comparen y contrasten los distintos enfoques. Además se debatirá y reflexionará sobre las posibilidades curriculares y pedagógicas de la modelización matemática en la enseñanza de matemática.

Lingefjärd (2007) sostiene que la integración efectiva de la modelización en la enseñanza de las matemáticas escolares, puede darse si los profesores en formación desarrollan conocimientos y llevan a cabo experiencias donde reflexionen sobre el uso de esta estrategia en la enseñanza de contenidos matemáticos. Esto pone en evidencia la importancia de integrarla en el diseño de tareas. De este modo, el futuro profesor comprenderá el potencial de la modelización como estrategia de enseñanza y desarrollará el conocimiento necesario para sus distintas formas de aplicación en la enseñanza de las matemáticas.

Presentamos a continuación la situación problemática que se propondrá, desde la asignatura, al grupo de estudiantes para realizar el trabajo planteado:

Un alumno trae a clase un anuncio en un folleto de un supermercado. En él aparece una promoción de rollos de papel higiénico. Vamos a considerar que hemos incluido en nuestro chango la compra de un rollo de papel en cuyo envase se indica que tiene, 4 rollos de 50 metros cada uno. Nos planteamos, como consumidores saber, si efectivamente, cada rollo mide o no la longitud anunciada. Pero, ¿cómo hacerlo?

Desde luego, no parece lo más adecuado ir, por ejemplo, a una cancha de fútbol, para desenrollar el papel y medirlo (cosa que por otra parte habría que hacer con mucha precisión porque este método, además de poco ortodoxo y poco atractivo, podría inducirnos a error, si el papel no está bien desenrollado y nuestra forma de proceder con la medición no es muy cuidadosa). Pensemos, como futuros profesores de Matemática diferentes formas de abordar el problema.

Analizamos para la situación propuesta diferentes maneras de resolución donde cada una de ellas conduce a una ecuación, modelo matemático, que permitirá obtener la longitud del rollo.

Algunas propuestas de resolución a este problema sencillas, otras más técnicas y otras originales, que se podrían derivar del trabajo de este problema en el aula son las siguientes:

1) Podemos ver el rollo de papel como una serie de circunferencias concéntricas.
Comencemos considerando el rollo de papel como un cilindro hueco (Figura 1)

Figura 1

donde r denota el radio del tubo cilíndrico de cartón sobre el cual va enrollado el papel y R es el radio del cilindro total del rollo (con el papel enrollado).

Podemos considerar que la longitud L del rollo de papel (que es la magnitud que queremos calcular) es la suma de cada una de las n capas que definen el cilindro de papel. Si llamamos con e al espesor del papel, la longitud l_n de la capa n-ésima es la de una circunferencia de cierto radio que, es función de r y e (suponiendo que el radio de cada capa llega desde el centro de la circunferencia que define el cilindro hueco de cartón hasta el punto más lejano de la capa correspondiente). En esta oportunidad se supone que cada capa es una circunferencia. Surge aquí una idea interesante para ser abordado en el aula: ¿cómo cambiará la solución si en lugar de tomar el punto más alejado del centro del centro del cilindro, consideráramos el punto medio del espesor de la capa o un punto de la parte de la capa más cercana al centro del cilindro de cartón?

El instrumento utilizado para medir el grosor e del papel puede ser el micrómetro (del griego micros, pequeño, y metros, medición) o también llamado Tornillo de Palmer.

Las expresiones para las tres primeras capas que tenemos:

$$l_1 = 2\pi(r+e); \quad l_2 = 2\pi(r+2e)$$

Y así siguiendo

$$l_n = 2\pi(r+ne)$$

Teniendo en cuenta que la longitud total de papel está dada por la suma de los perímetros de la primera a la última vuelta, es decir:

$$L = \sum_{k=1}^{n} 2\pi(r+ne)$$

y aplicando la fórmula de la suma de los n primeros términos de una progresión aritmética se obtiene:

$$L = 2n\pi r + 2\pi e\frac{n(n+1)}{2}$$

Por otra parte observemos que el número de capas es $n = \frac{R-r}{e}$

Como estamos pensando que n es muy grande, podemos suponer que $n \approx n+1$, y en este caso

$$L \approx 2\frac{R-r}{e}\pi r + 2\pi e\frac{(R-r)^2}{2e^2} = \frac{\pi}{e}(R-r)(2r+R-r) = \frac{\pi}{e}(R^2-r^2)$$

Este modelo nos da la solución en términos de los datos: los radios de los cilindros (el exterior R, e interior r) y el espesor e del papel los cuales podemos nosotros mismos medir.

2) La siguiente es otra solución que puede surgir del trabajo en el aula y que requiere conocimientos más básicos o elementales.

Si desenrollamos todo el papel, la tira que queda puede considerarse como un paralelepípedo de altura igual a: e (el espesor o grosor del papel) y base un rectángulo de lados, la longitud buscada L y anchura la altura del cilindro donde se enrolla el papel, digamos h. El volumen de este paralelepípedo debe coincidir con el del cilindro hueco que define el rollo de papel. Imponiendo esta condición se obtiene una ecuación que permite calcular L en términos de los datos:

Volumen cilindro con hueco= $\pi(R^2 - r^2)h$ y Volumen del paralelepípedo = Lhe.

Igualando y despejando tenemos

$$L = \frac{\pi(R^2-r^2)}{e}$$

3) En la primera resolución se ha supuesto que el papel puede ser tratado como capas discretas de radio creciente, aunque con diferentes valores para sus radios.

Ahora supongamos que el papel es en una hoja continua, por lo que en realidad el rollo se asemeja a una espiral, para las que ya existen fórmulas que permiten calcular la longitud de papel del rollo encontrando la longitud de la espiral de Arquímedes.

A pesar de ser curvas muy conocidas por su presencia en el entorno en que nos desenvolvemos, las espirales no son suficientemente trabajadas en un curso de Análisis Matemático. Se puede deducir fácilmente que, en coordenadas polares (r, θ), esta espiral puede ser descrita por la siguiente ecuación general:

$r = a + b\theta$,

siendo a y b números reales, en donde a es la distancia entre el punto inicial de la espiral y el origen de coordenadas y b controla la distancia entre los giros sucesivos.

Como es necesario encontrar una expresión para $r(\theta)$. En primer lugar, cuando $\theta = 0, r(\theta) = r_0$, así, $a = r(0) = r_0$.

Esta curva se caracteriza por el hecho de que vueltas sucesivas de la misma tienen distancias de separación constante, en este caso está dada por el espesor e del papel. Como puede verse si restamos los radios de dos espiras consecutivas al dar una vuelta completa. Esto es,

$r = a + b\theta$

$r' = a + b(\theta + 2\pi)$

De donde, $r' - r = 2\pi b$.

Se puede observar que, en el caso del rollo de papel, la distancia entre dos espiras consecutivas está dada por el grosor del papel. Luego, debe ser $2\pi b = e$, de donde el parámetro b está dado por $b = \frac{e}{2\pi}$.

Por consiguiente,

$$r(\theta) = r_0 + \frac{\theta e}{2\pi}$$

Así, al graficar la ecuación en un sistema de coordenadas polares, utilizando el software GeoGebra se obtiene la siguiente curva (Figura 2):

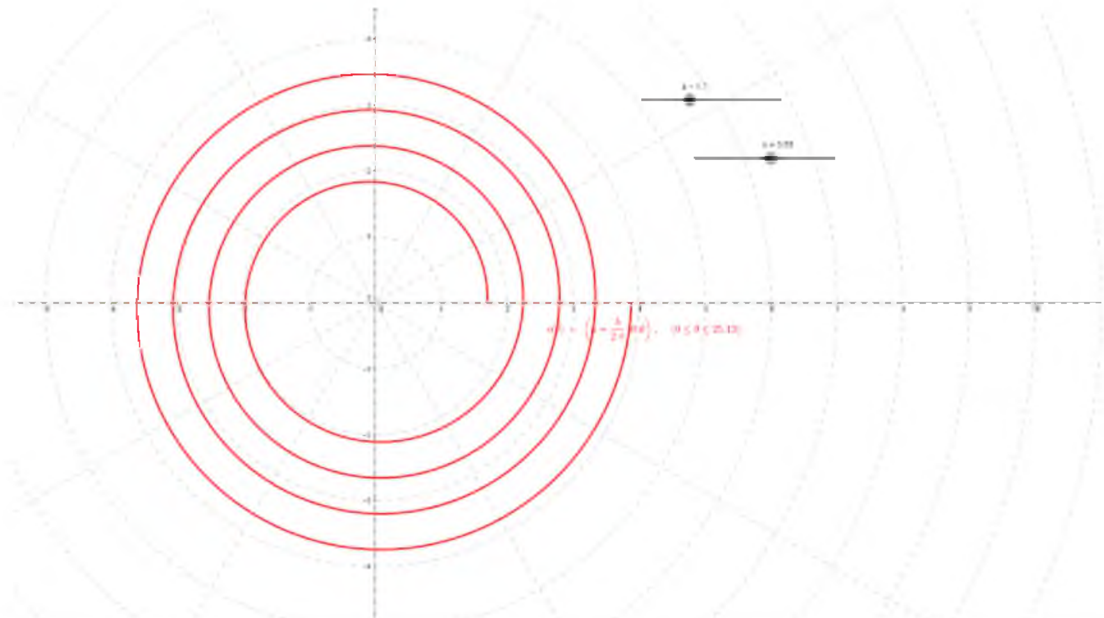


Figura 2

Usando la fórmula de cálculo de la longitud de una curva, estudiada en Análisis Matemático, y teniendo en cuenta que la espiral puede representarse como $r\ (\theta)$, donde θ es el ángulo y que el valor máximo de θ es $2\pi n$, pues hay n vueltas de papel en el rollo de papel, obtenemos:

$$L = \int_0^{2\pi n} \sqrt{(r'(\theta))^2 + (r(\theta))^2}\ d\theta = \int_0^{2\pi n} \sqrt{\left(\frac{e}{2\pi}\right)^2 + \left(\frac{e}{2\pi}\theta + r_0\right)^2}\ d\theta$$

Utilizando algún software como por ejemplo, Wolfram | Alpha obtenemos la primitiva:

$$\int \sqrt{\left(\frac{e}{2\pi}\right)^2 + \left(\frac{e\,\theta}{2\pi} + r_0\right)^2}\ d\theta = \frac{(e\,\theta + 2\pi r_0)\sqrt{(e\,\theta + 2\pi r_0)^2 + e^2} + e^2 \sinh^{-1}\left(\theta + \frac{2\pi r_0}{e}\right)}{4\,e\,\pi} + \text{constant}$$

Y la evaluación de esta expresión en los límites de la integral nos da la longitud de la curva deseada.

La situación propuesta tiene el potencial natural de integrar múltiples prácticas matemáticas pues el proceso de modelización requiere que los estudiantes justifiquen sus supuestos, validen conclusiones, tomen decisiones matemáticas apropiadas e iteren refinamiento en esas elecciones y suposiciones hasta alcanzar una solución aceptable.

Consideramos importante analizar:

a) cambio en la práctica docente, varios factores pueden ser responsables de estos cambios, tales como la motivación, el interés, la participación y la enseñanza de los estudiantes.

b) dificultades en el ejercicio del rol docente con la integración Modelización Matemática, que requiere tiempo para su ejecución, lo que torna su dinámica en un trabajo difícil, generando inseguridad y constituyen un obstáculo para la incorporación de la modelización en las aulas.

c) planificación de la enseñanza de la Matemáticas, relacionada con la elección de materiales y recursos en el diseño y análisis de las tareas u oportunidades de aprendizaje. En este sentido, se asume que la formación inicial de profesores de matemáticas debe integrar las herramientas TIC como recursos de enseñanza.

Resultados alcanzados y/o esperados

Comentarios Finales

Para que un cambio en la enseñanza de la Matemática ocurra, es necesario crear los espacios donde los futuros profesores tengan la oportunidad de familiarizarse desde su formación y construir un conocimiento profesional que le permita tomar una perspectiva de renovación.

En esta experiencia se plantea trabajar con la modelización matemática con un doble objetivo que los futuros profesores vivencien el trabajo con este tipo de situaciones para su posterior planificación y transferencia al ciclo básico u orientado de la educación secundaria.

La condición necesaria para que el profesor implemente situaciones de modelización en la enseñanza es tener audacia, gran deseo de modificar su práctica y tener disposición a conocer y aprender.

Baumert et al. (2010) señalan que el conocimiento pedagógico del contenido es una influencia decisiva tanto en la calidad de la instrucción como en la mejora de la calidad del aprendizaje de los escolares. Señalan también que para poder desarrollar conocimiento pedagógico del contenido es necesario un conocimiento sólido del contenido matemático.

Por lo tanto, es imperativo que los profesores desarrollen un buen entendimiento de la modelización para que puedan usarla como estrategia de enseñanza usando conceptos conocidos y aprendiendo nuevos.

Esta experiencia facilitará reflexiones, modificaciones y revisiones de los modelos conceptuales de los futuros profesores y brindará herramientas que los preparen mejor para anticipar las formas en sus alumnos pueden pensar matemáticamente los problemas del mundo real.

Creemos que esta etapa de formación inicial puede poner los cimientos para el desarrollo de conocimientos y competencias que permita al docente generar una actitud crítica hacia la propia práctica.

Referencias bibliográficas

Barbosa, J.C. (2001) Mathematical Modelling in Pre-service Teacher Education, en Matos, J.F., Blum, W., Houston, S.K. y Carreira, I.S.P. (eds.). Modelling and Mathematics Education. (ICTMA 9: Applications in Science and Technology). Chichester, UK: Horwood Publishing.

Baumert, J., Kunter, M., Blum, W., Brunner, M., Voss, T., Jordan, A., et al. (2010) Teachers' mathematical knowledge, cognitive activation in the classroom, and student progress.American Educational Research Journal, 47(1), 133–180. doi: 10.3102/0002831209345157.

Blomhøj, M. (2004) Modelización Matemática - Una Teoría para la Práctica. Traducción: María Mina Traducción autorizada por el autor del artículo: Blomhøj, M. Mathematical modelling - A theory for practice. En Clarke, B.; Clarke, D. Emanuelsson, G.; Johnansson, B.; Lambdin, D.; Lester, F. Walby, A. & Walby, K. (Eds.) International Perspectives on Learning. National Center for Mathematics Education. Suecia, pp. 145-159. Recuperado el 30-08 de 2017 en http://www.famaf.unc.edu.ar/rev_edu/documents/vol_23/23_2_Modelizacion1.pdf

Blomhøj, M. (2009) Different Perspectives in Research on Teaching and Learning Mathematical Modelling.Categorizing the TSG21 Papers. In Blomhøj, M. & S. Carreira, (eds.). Mathematical applications and modeling in the teaching and learning of mathematics. Proceeding from topic study group 21 at the 11th International congress on Mathematical education in Monterrey, México, July 6-13, 2008. Imfufa, Roskilde Universiy, Denmark: Authors.

Blomhøj, M. y Højgaard Jensen, T. (2003) Developing mathematical modelling competence: conceptual clarification and educational planning.Teaching Mathematics and its Application 22 (3),123-138

Esteley, C., Mina, M., Cristante, A. y Marguet I. (2007) Innovación en el aula: desarrollo profesional y modelización. En R. Abrate & M. Pochulu (Eds.). Experiencias, propuestas y reflexiones para la clase de Matemática. Villa Maria: UNVM.

Giuliani, D. y Segal, S. (2008) Modelización matemática en el aula. Posibilidades y necesidades. Buenos Aires: Libros del Zorzal.

Kaiser, G. y Sriraman, B. (2006) A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education.Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 38 (3), pp.302-310.

Lingefjärd, T. (2007) Modelling in teacher education. En Blum, Galbrait, Henn y Niss (Eds). Modelling and applications in mathematics education.The 14th ICMI Study.(pp. 475-482). New York: Springer.